EVALUACIÓN: 1ª CURSO: 2º B.C.T. FECHA: 17/11/20 EXAMEN: 1º

1) Calcula los siguientes límites:

$$\boldsymbol{i)}\ \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{3x+1} - \sqrt{x+3}}{x^3 - 1} \quad (3\ ptos) \quad \boldsymbol{ii)}\ \lim_{x\to 2} \left(\frac{x^2+1}{x} - \frac{x+4}{x^2}\right)^{\frac{x}{x^2-4}} \quad (4\ ptos)$$

$$\boldsymbol{iii)}\ \lim_{x\to +\infty} \sqrt{\frac{(x^2+2)^2 - (x^2-2)^2}{(3x+2)^2 - x}} \quad \textit{(3 ptos)}$$

2)a) Dadas las funciones $f(x) = \frac{x^3+1}{x^3-1}$ y $g(x) = \sqrt[3]{x+2}$. Calcula $(\,f\ o\ g\,)^{-1}$
(3 ptos)

b) Dadas las funciones $f(x) = \frac{a}{x+1}$ y $g(x) = \sqrt{x^2 + x + 2}$. Calcula **a** para que en el punto de abscisa **x_0 = 1** las tangentes a las dos curvas sean paralelas.
(5 ptos)
Calcula también las ecuaciones de las dos tangentes *(2 ptos)*

3)Dada la función $f(x) = \begin{cases} e^{ax} - e^x + 1 & si \quad x < 0 \\ \sqrt{x + a\,b} & si \quad x \geq 0 \end{cases} \qquad con \quad a\,.\,b > 0$

i)Estudia la continuidad y la derivabilidad según los parámetros ***a*** y ***b*** *(5ptos)*

ii) Cuando sea derivable calcula la recta tangente en la conexión *(2 ptos)*

iii) Para ***a = b = 1*** comprueba que no hay ningún punto donde la recta tangente sea paralela a la recta ***y = x*** *(3 ptos)*

4)a) Deriva las siguientes funciones simplificando el resultado todo lo posible

$$\boldsymbol{i)}\ \ y = ln\sqrt[3]{\frac{1+x^2}{1-x^2}} \quad (3\ ptos) \qquad \boldsymbol{ii)}\ \ y = arc\ tg\,\sqrt{x} - arc\ tg\,\frac{1}{\sqrt{x}} \quad (3\ ptos)$$

b)Calcula la recta tangente a la curva $y = (\,1 + \cos^2 x\,)^{1+sen\,x}$ en el punto de abscisa ***x_0 = π*** *(4 ptos)*

1)

i) $$\lim_{x\to 1} \frac{\left(\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+3}\right)\left(\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+3}\right)}{\left(x^3-1\right)\left(\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+3}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{\left(\sqrt{3x+1}\right)^2-\left(\sqrt{x+3}\right)^2}{\left(x^3-1\right)\left(\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+3}\right)} = \lim_{x\to 1} \frac{(3x+1)-(x+3)}{\left(x^3-1\right)\left(\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+3}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{3x+\cancel{1}-x-3}{\left(x^3-1\right)\left(\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+3}\right)} = \lim_{x\to 1} \frac{2x-2}{\left(x^3-1\right)\left(\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+3}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{2\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}\left(x^2+x+1\right)\left(\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+3}\right)} =$$

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ & & 1 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

$x^2+x+1=0 \to \nexists$ sol

$$= \lim_{x\to 1} \frac{2}{\left(x^2+x+1\right)\left(\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+3}\right)} = \lim_{x\to 1} \frac{2}{\underbrace{(1+1+1)}_{3}\cdot\underbrace{(2+2)}_{4}} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

ii) $$\lim_{x\to 2} \left(\frac{x(x^2+1)-(x+4)}{x^2}\right)^{\frac{x}{x^2-4}} = \lim_{x\to 2} \left(\frac{x^3+\cancel{x}-\cancel{x}-4}{x^2}\right)^{\frac{x}{x^2-4}} =$$

$$= \lim_{x\to 2} \left(\frac{x^3-4}{x^2}\right)^{\frac{x}{x^2-4}} = \lim_{x\to 2} \left(\frac{x^2+(x^3-x^2-4)}{x^2}\right)^{\frac{x}{x^2-4}} =$$

$$= \lim_{x\to 2} \left(1+\frac{x^3-x^2-4}{x^2}\right)^{\frac{x}{x^2-4}} = \lim_{x\to 1} \left(1+\frac{1}{\frac{x^2}{x^3-x^2-4}}\right)^{\frac{x}{x^2-4}} =$$

$$= \lim_{x\to 2} \left(1+\frac{1}{\frac{x^2}{x^3-x^2-4}}\right)^{\frac{x}{x^2-4}\cdot\frac{x^2}{x^3-x^2-4}\cdot\frac{x^3-x^2-4}{x^2}} =$$

$$= e^{\lim_{x\to 2} \frac{x(x^3-x^2-4)}{(x^2-4)x^2}}$$

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & -1 & 0 & -4 \\ & & 2 & 2 & 4 \\ \hline & 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}$$

$x^2+x+2=0 \to \nexists$ sol

$$\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{x}(\cancel{x-2})(x^2+x+2)}{(x+2)(\cancel{x-2})\,x^{\cancel{2}}} =$$

$$= e$$

$$= e^{\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x+2}{(x+2)\cdot x}} = e^{\frac{4+2+2}{4\cdot 2}} = e^1 = \underline{\underline{e}}$$

iii) $$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{(x^4+4+4x^2)-(x^4+4-4x^2)}{9x^2+4+12x-x}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{\cancel{x^4}+\cancel{4}+4x^2-\cancel{x^4}-\cancel{4}+4x^2}{9x^2+4+12x-x}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{8x^2}{9x^2+11x+4}} = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

2) a) $$(f\circ g)(x) = \frac{(\sqrt[3]{x+2})^3+1}{(\sqrt[3]{x+2})^3-1} = \frac{x+2+1}{x+2-1} =$$

$$= \frac{x+3}{x+1}$$

$\frac{x+3}{x+1} = z$; $x+3 = z(x+1)$; $x+3 = zx+z$

$x - zx = z-3$; $x(1-z) = z-3$

$$x = \frac{z-3}{1-z}$$ $$\boxed{(f\circ g)^{-1}(x) = \frac{x-3}{1-x}}$$

b) $$f'(x) = \frac{0\cdot(x+1) - 1\cdot a}{(x+1)^2} = \frac{-a}{(x+1)^2}$$

$$g'(x) = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+2}}$$

$$f'(1) = g'(1)$$

$$f'(1) = \frac{-a}{(1+1)^2} = -\frac{a}{4}$$

$$g'(1) = \frac{2\cdot 1+1}{2\sqrt{1+1+2}} = \frac{3}{4}$$

$$\begin{cases} -\frac{a}{4} = \frac{3}{4} \\ \Rightarrow \underline{\underline{a = -3}} \end{cases}$$

$$f'(1) = g'(1) = \frac{3}{4}$$

Tangente a f:

$$f(1) = \frac{-3}{1+1} = -\frac{3}{2}$$

$P_0\left(1, -\frac{3}{2}\right)$

$$y = \frac{3}{4}(x-1) + \left(-\frac{3}{2}\right); \quad y = \frac{3}{4}x - \frac{3}{4} - \frac{3}{2}$$

$$\underline{\underline{y = \frac{3}{4}x - \frac{9}{4}}}$$

Tangente a g:

$$g(1) = \sqrt{1+1+2} = \sqrt{4} = 2$$

$P_0(1, 2)$

$$y = \frac{3}{4}(x-1) + 2; \quad y = \frac{3}{4}x - \frac{3}{4} + 2$$

$$\underline{\underline{y = \frac{3}{4}x + \frac{5}{4}}}$$

3) i)

$\boxed{\text{CONTINUIDAD}}$

CONEXIONES

FUNCIONES

Nada

$x = 0$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = e^0 - e^0 + 1 = 1 - 1 + 1 = 1$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \sqrt{0 + ab} = \sqrt{ab}$$

$$f(0) = \sqrt{ab}$$

En $x = 0$ CTA si $\sqrt{ab} = 1 \Rightarrow \underline{ab = 1}$

$\boxed{\text{DERIVABILIDAD}}$

CONEXIONES

FUNCIONES

Nada

$x = 0$

$$f'(x) = \begin{cases} a e^{ax} - e^x & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x + ab}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = a \cdot e^0 - e^0 = a \cdot 1 - 1 = a - 1$$

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{0 + ab}} = \frac{1}{2\sqrt{ab}}$$

⑤

Derivable en $x=0$ si $\sqrt{ab}=1$

y $\frac{1}{2\sqrt{ab}} = a-1 \Rightarrow \frac{1}{2} = a-1 \Rightarrow a=\frac{3}{2}$

$\sqrt{\frac{3}{2}\cdot b} = 1 \Rightarrow \frac{3}{2}\cdot b = 1 \Rightarrow b = \frac{2}{3}$

Si $x \neq 0$ $f(x)$ CTA Y DERIVABLE en $\mathbb{R}$

Si $x=0$ | CTA si $a.b=1$

DERIVABLE si $a=\frac{3}{2}$ y $b=\frac{2}{3}$

ii) Si es derivable $a=\frac{3}{2}$ y $b=\frac{2}{3}$ por tanto se puede definir $f'(0)=\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}$

$f(0)=\sqrt{0+\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}} = \sqrt{0+1} = 1$; $P_0(0,1)$

Recta tangente $y=\frac{1}{2}(x-0)+1$; $\underline{\underline{y=\frac{1}{2}x+1}}$

iii) Si $a=b=1 \Rightarrow f(x)=\begin{cases} e^x - e^x + 1 & \text{si } x<0 \\ \sqrt{x+1.1} & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$

$f(x)=\begin{cases} 1 & \text{si } x<0 \\ \sqrt{x+1} & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$

$f'(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ \frac{1}{2\sqrt{x+1}} & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$

Si es paralela a $y=x \Rightarrow f'(x)=1$ ⑥

Si $x<0$ $f'(x)=0$. No puede ser 1

Si $x \geq 0$ $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}} = 1$

$1 = 2\sqrt{x+1}$; $1 = 4(x+1)$; $1 = 4x+4$

$1-4=4x$; $x = -\dfrac{3}{4}$ pero $-\dfrac{3}{4} \not\geq 0$

Por tanto no hay ningún punto.

4) a) i) $y = \ln \sqrt[3]{\dfrac{1+x^2}{1-x^2}} = \ln \left(\dfrac{1+x^2}{1-x^2}\right)^{1/3} =$

$= \dfrac{1}{3} \ln\left(\dfrac{1+x^2}{1-x^2}\right) = \dfrac{1}{3}\left[\ln(1+x^2) - \ln(1-x^2)\right]$

$y' = \dfrac{1}{3}\left[\dfrac{1}{1+x^2}\cdot 2x - \dfrac{1}{1-x^2}\cdot(-2x)\right] =$

$= \dfrac{1}{3}\left[\dfrac{2x}{1+x^2} + \dfrac{2x}{1-x^2}\right] = \dfrac{1}{3}\left[\dfrac{2x(1-x^2)+2x(1+x^2)}{(1+x^2)(1-x^2)}\right] =$

$= \dfrac{1}{3}\left[\dfrac{2x - \cancel{2x^3} + 2x + \cancel{2x^3}}{1-x^4}\right] = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{4x}{1-x^4} =$

$= \dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{x}{1-x^4}$

ii) $y = \operatorname{arc\,tg} \sqrt{x} - \operatorname{arc\,tg} \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

$$y' = \frac{1}{1+(\sqrt{x})^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{1+\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2} \cdot \frac{0\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot 1}{(\sqrt{x})^2}$$

$$= \frac{1}{1+x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{1+\frac{1}{x}} \cdot \frac{-1}{x \cdot 2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{1}{1+x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{\frac{x+1}{x}} \cdot \frac{1}{2x\sqrt{x}} =$$

$$= \frac{1}{1+x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{\cancel{x}}{(x+1) \cdot 2\cancel{x}\sqrt{x}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{x}(\cancel{x}+1)}} \quad \cancel{2}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)} + \frac{\cancel{1}}{2\sqrt{x}(x+1)} = \frac{}{\cancel{2}\sqrt{x}(x+1)}$$

b) $f(\pi) = (1+\cos^2 \pi)^{1+\operatorname{sen}\pi} = (1+(-1)^2)^{1+0} =$

$= (1+1)^1 = 2^1 = 2$; $P_0(\pi, 2)$

$$\ln y = \ln (1+\cos^2 x)^{1+\operatorname{sen} x} = (1+\operatorname{sen} x) \ln (1+\cos^2 x)$$

$$\frac{y'}{y} = \cos x \ln (1+\cos^2 x) + (1+\operatorname{sen} x) \cdot \frac{1}{1+\cos^2 x} \cdot (-2\cos x \cdot \operatorname{sen} x)$$

$$y' = y \left[\cos x \ln (1+\cos^2 x) - \frac{\operatorname{sen} 2x \,(1+\operatorname{sen} x)}{1+\cos^2 x} \right]$$

$$y' = (1+\cos^2 x)^{1+\operatorname{sen} x}\left[\cos x \ln(1+\cos^2 x) - \frac{\operatorname{sen} 2x\,(1+\operatorname{sen} x)}{1+\cos^2 x}\right]$$

$$y'(\pi) = (1+(-1)^2)^{1+0}\left[(-1)\cdot\ln 2 - \frac{0\cdot 1}{1+1}\right] =$$

$$= 2^1\left[-\ln 2\right] = -2\ln 2$$

<u>Recta tangente</u>

$$y = -2\ln 2\,(x-\pi) + 2$$

$$\boxed{y = -2\ln 2\, x + (2\ln 2\cdot\pi + 2)}$$

EVALUACIÓN: 1ª **CURSO: 2º B.C.T.** **FECHA: 30/11/20** **EXAMEN: 1º REC**

1.- a) Calcula los siguientes límites:

i) $\lim_{x\to 2}\left(\frac{5}{x-2}-\frac{2x+6}{x^2-2x}\right)$ ***(2 puntos)*** ii) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{2x^2}+\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{x}}$ ***(4 puntos)***

b) Halla el valor de "a" para que se cumpla : $\lim_{x\to\infty}\left(2x-\sqrt{4x^2+ax+1}\right)=1$ ***(4 puntos)***

2.-

a) Halla los valores de a y b para que sea derivable la función $f(x)=\begin{cases} e^{2ax-4b}, & si\ \ x<1 \\ 1-x\ln x, & si\ \ x\geq 1\end{cases}$ ***(6 puntos)***

b) Halla la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en el punto de abscisa x=2 ***(1 puntos)***

c) Para a=b=1 halla si existe la ecuación de la recta tangente en x=-1 y en x=1 ***(3 puntos)***

3.- Dada la función $f(x)=\frac{|x|+x}{2+|\ x-1|}$ Estudia la continuidad y derivabilidad ***(10 puntos)***

4.- a) Dadas las funciones $f(x)=x^2-ax-4$ y $g(x)=\frac{x^2}{2}+b$, halla los valores de a y b de manera que las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$ tengan la misma recta tangente en el punto de abscisa x = 3. Halla la ecuación de la recta. ***(3 puntos)***

b) Deriva y simplifica $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ ***(3 puntos)***

c) Encuentra, si los hay, los puntos donde la recta tangente a la función $h(x)=arc\ tg\ \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ es horizontal ***(4 puntos)***

i) $\lim_{x\to 2}\left(\frac{5}{x-2}-\frac{2x+6}{x^2-2x}\right)=\infty-\infty=\lim_{x\to 2}\left(\frac{5x-2x-6}{x(x-2)}\right)=$

$=\lim_{x\to 2}\frac{3x-6}{x(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{3(x-2)}{x(x-2)}=\frac{3}{2}$

ii) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{2x^2}+\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1+x^2}{2x^2}\right)^{\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+1}{2x^2}\right)^{\sqrt{x}}=$

$=1^{\infty}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{2x^2}\right)^{2x^2}\right]^{\frac{\sqrt{x}}{2x^2}}=e^{\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{2x^2}}=e^0=1$

b) $\lim_{x\to\infty}\left(2x-\sqrt{4x^2+ax+1}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2-4x^2-ax-1}{2x+\sqrt{4x^2+ax+1}}=$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{-ax-1}{2x+\sqrt{4x^2+ax+1}}=1.$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{-a-1/x}{2+\sqrt{4+\frac{a}{x}+\frac{1}{x^2}}}=\frac{-a}{2+2}\Rightarrow -\frac{a}{4}=1\Rightarrow \underline{\underline{a=-4}}$

② a) $f(x)=\begin{cases} e^{2ax-4b} & \text{si } x<1\\ 1-x\ln x & \text{si } x\geq 1.\end{cases}$

f continua en $x\neq 1$.

en $x=1$, f continua en $x=1 \iff f(1)=\lim_{x\to 1^-}e^{2ax-4b}=$

$=\lim_{x\to 1^+}(1-x\ln x)$

$1=e^{2a-4b}\Rightarrow 2a-4b=0\Rightarrow a-2b=0\Rightarrow \boxed{a=2b}$

Derivada $\quad f'(x)=\begin{cases} 2a\cdot e^{2ax-4b} & \text{si } x<1\\ -\ln x-1 & \text{si } x>1\end{cases}$

para que $\exists f'(1)\iff \lim_{x\to 1^-}(2a\cdot e^{2ax-4b})=\lim_{x\to 1^+}(-\ln x-1)$

$\Rightarrow 2ae^{2a-4b}=-1\Rightarrow 2a=-1\Rightarrow a=-\frac{1}{2}$

$b=\frac{a}{2}=-\frac{1}{4}$

b) $f'(2) = -\ln 2 - 1$

$f(2) = 1 - 2\ln 2$

$y = 1 - 2\ln 2 + (-\ln 2 - 1)(x-2)$

$y = (-\ln 2 - 1)x + 1 - 2\ln 2 + 2\ln 2 + 2$

$y = (-\ln 2 - 1)x + 3$

El apartado (c) está al final

(3) $f(x) = \dfrac{|x| + x}{2 + |x-1|}$

$$y = \begin{cases} \dfrac{-x+x}{2-x+1} & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{x+x}{2-x+1} & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ \dfrac{x+x}{2+x-1} & \text{si } x > 1 \end{cases} \longrightarrow y = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{2x}{3-x} & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ \dfrac{2x}{x+1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

f continua si $x < 0$ es cte.

si $0 < x < 1$ cociente / pols con denominador $\neq 0$

si $x > 1$ " y pols con denominador $\neq 0$

en $x = 0$ $f(0) = \lim_{x \to 0^-} 0 = \lim_{x \to 0^+} \dfrac{2x}{3-x} = 0$

en $x = 1$ $f(1) = \lim_{x \to 1^-} \dfrac{2x}{3-x} = \lim_{x \to 1^+} \dfrac{2x}{x+1}$

$1 = \dfrac{2}{2}$ $\Rightarrow$ f continua en $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{2(3-x) + 2x}{(3-x)^2} & \text{si } 0 < x < 1 \\ \dfrac{2(x+1) - 2x}{(x+1)^2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{6}{(3-x)^2} & \text{si } 0 < x < 1 \\ \dfrac{2}{(x+1)^2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^-)=0 \\ f'(0^+)=\frac{6}{9}=\frac{2}{3} \end{array}\right\} \quad f'(0^-)\neq f(0^+) \Rightarrow \nexists\, f'(0)$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(1^-)=\frac{6}{4}=\frac{3}{2} \\ f'(1^+)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2} \end{array}\right\} \quad f'(1^-)\neq f'(1^+) \Rightarrow \nexists\, f'(1)$$

4) a) misma recta tangente en $x=3$ $\quad f'(3)=g'(3)$

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=2x-a \Rightarrow f'(3)=6-a \\ g'(x)=x \Rightarrow g'(3)=3 \end{array}\right\} \quad 6-a=3 \quad \boxed{a=3}$$

$$f(3)=9-a\cdot 3-4=5-3a=5-9=-4$$

$$g(3)=\frac{9}{2}+b=-4 \rightarrow b=-4-\frac{9}{2}=-\frac{17}{2}; \quad \boxed{b=-\frac{17}{2}}$$

$$y=-4+3(x-3) \quad ; \quad y=-4+3x-9$$

$$\boxed{y=3x-13}$$

b) $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

$$\ln f = x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

$$\frac{f'}{f}=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)+\cancel{x}\,\frac{-\frac{1}{x^{\cancel{2}}}}{1+\frac{1}{x}}$$

$$f'=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}\right]$$

c) $$h'(x)=\frac{1}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2}\cdot\frac{\sqrt{1-x^2}-x\cdot\frac{(-\cancel{2}x)}{\cancel{2}\sqrt{1-x^2}}}{(\sqrt{1-x^2})^2}=$$

$$=\frac{\cancel{(\sqrt{1-x^2})^2}}{(\cancel{\sqrt{1-x^2}})^{\cancel{2}}+x^2}\cdot\frac{1-\cancel{x^2}+\cancel{x^2}}{\cancel{2}(\sqrt{1-x^2})^{\cancel{3}}}=\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{1-x^2}}$$

$$h'(x)\neq 0 \quad \forall x$$

2

c) Para $a = b = 1$

$$f(x) = \begin{cases} e^{2x-4} & \text{si } x < 1 \\ 1 - x\ln x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

~~para~~ $x = -1$ $\quad f(x) = e^{2x-4}$ $\qquad f'(x) = 2\cdot e^{2x-4}$

$f'(-1) = 2\cdot e^{-6}$

$f(-1) = e^{-6}$

ec. recta tg $\quad y = e^{-6} + 2e^{-6}(x+1)$

$$\boxed{\begin{aligned} y &= 2e^{-6}x + 3e^{-6} \\ y &= \frac{2x+3}{e^{6}} \end{aligned}}$$

en $x = 1$. $\quad \lim_{x \to 1^-} f(x) = e^{-2}$, $\quad \lim_{x \to 1^+} f(x) = 1$ $\quad \nexists \lim_{x \to 1} f(x) \Rightarrow f$ no es continua, y no es derivable.

No existe recta tangente.

EVALUACIÓN: 2ª CURSO: 2º B.C.T. FECHA: 26/1/21 EXAMEN: 3º

1) a) Calcula los siguientes límites:

$i)\ \lim_{x \to 0} \dfrac{sen^2\,(x+\pi) - \cos^2(x+\pi) + x^2 + 1}{sen^2\,x}$ *(3 puntos)*

$ii)\ \lim_{x \to 1} (x^2 - 1)^{\operatorname{sen}\,(x-1)}$ *(3 puntos)*

b) De todos los ortoedros (con las dos tapas) de área 56 cm^2 , cuya largura es el doble de la anchura, calcula las dimensiones del que tiene la diagonal mínima.

$\left(D = \sqrt{(ancho)^2 + (largo)^2 + (alto)^2} \right)$ ***(4 puntos)***

2) Dada la función $y = \frac{a\,x^2 + b\,x}{x^2 + 1}$.

i) Calcula **a** y **b** sabiendo que **y=2** es una asíntota horizontal y que la curva corta a esa asíntota en el punto **P(-1,2)** ***(2 puntos)***

ii) Calcula **a** y **b** sabiendo que tiene un extremo relativo (máximo o mínimo) en el punto **Q(1,1)** ***(3 puntos)***

iii) Para el caso **a=0** y **b=2** estudia su crecimiento, decrecimiento, extremos relativos, puntos de inflexión, concavidad y convexidad ***(5 puntos)***

3) Calcula las siguientes integrales:

$a)\ \int \left(x\ sen\,3x + \dfrac{\cos x}{\sqrt[3]{sen^2\,x}} \right)\ dx$ ***(5 puntos)***

$b)\ \int_0^1 x^3\ \ln(x^4 + 1)\ dx$ ***(5 puntos)***

4) a) Calcula la integral $\int arc\ \cos\ 2x\ \ dx$ ***(4 puntos)***

b) Calcula el área delimitada por las curvas $f(x) = x$, $g(x) = \frac{7\,x}{x^2 - 1}$ y las rectas $x = 2$ y $x = 3$ ***(6 puntos)***

(1)

① a)

i) $$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2(x+\pi) - \cos^2(x+\pi) + x^2+1}{\operatorname{sen}^2 x} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$\underset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2\operatorname{sen}(x+\pi)\cos(x+\pi) + 2\cos(x+\pi)\operatorname{sen}(x+\pi) + 2x}{2\operatorname{sen}x\cos x} = \frac{0}{0} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{4\operatorname{sen}(x+\pi)\cos(x+\pi)+2x}{\operatorname{sen}2x} \underset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{4\left(\cos^2(x+\pi) - \operatorname{sen}^2(x+\pi)\right)+2}{2\cos 2x} =$$

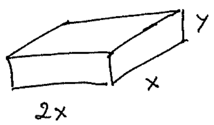
$$= \frac{6}{2} = 3.$$

ii) $$\lim_{x\to 1} (x^2-1)^{\operatorname{sen}(x-1)} = (0^0) = e^{\lim\limits_{x\to 1} \operatorname{sen}(x-1)\cdot\ln(x^2-1)} = \left(e^{(0\cdot\infty)}\right) = e^0 = 1$$

$$* \lim_{x\to 1} \frac{\ln(x^2-1)}{\frac{1}{\operatorname{sen}(x-1)}} = \frac{\infty}{\infty} \underset{L'H}{=} \lim_{x\to 1} \frac{\frac{2x}{x^2-1}}{-\frac{\cos(x-1)}{\operatorname{sen}^2(x-1)}} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{-2x\cdot\operatorname{sen}^2(x-1)}{(x^2-1)\cdot\cos(x-1)} = \frac{0}{0} \underset{L'H}{=} \lim_{x\to 1} \frac{-2\operatorname{sen}^2(x-1) - 2x\left(2\cos(x-1)\operatorname{sen}(x-1)\right)}{2x\cos(x-1) - (x^2-1)\operatorname{sen}(x-1)} =$$

$$= \frac{0}{2} = 0$$

b) 

$x, y > 0$

$4xy + 2xy + 4x^2 = 56 \quad ; \quad 2x^2 + 3xy = 28$

$y = \dfrac{28-2x^2}{3x}$ para que $y>0$ debe ser $x \in (0, \sqrt{14})$

$$D(x,y) = \sqrt{4x^2+x^2+y^2}$$

$$D(x) = \sqrt{5x^2 + \left(\frac{28-2x^2}{3x}\right)^2}$$

$$D(x) = \sqrt{\frac{49x^4 - 112x^2 + 784}{9x^2}}$$

$$D'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{49x^4-112x^2+784}{9x^2}}} \cdot \frac{(196x^3-224x)9x^2 - (49x^4-112x^2+784)\cdot 18x}{81x^4}$$

$$= \frac{49x^4 - 784}{3x^2\sqrt{49x^4-112x^2+784}}$$

$D' = 0 \Rightarrow 49x^4 - 784 = 0 \Rightarrow x = \sqrt[4]{16} = \begin{cases} 2 \\ -2 \text{ no sirve.} \end{cases}$

posible extremo relativo en $x = 2$.

$D'<0 \quad D'>0$

$0 \searrow 2 \nearrow \sqrt{14}$

en $x = 2$ hay un mínimo relativo.

$D(2) = \dfrac{2\sqrt{70}}{3}$

$\lim_{x \to 0^+} D(x) = +\infty$

$\lim_{x \to \sqrt{14}^-} D(x) = \sqrt{70}$

comparando los valores de D en el mínimo relativo y en los extremos del dominio de definición se concluye que en $x = 2$ hay un mínimo absoluto

si $x = 2$ $\quad y = \dfrac{28-8}{6} = \dfrac{10}{3}$, y las dimensiones son $4 \times 2 \times \dfrac{10}{3}$ u

② $y = \dfrac{ax^2+bx}{x^2+1}$

i) A.H $y = 2 \rightarrow \lim_{x\to\infty} \dfrac{ax^2+bx}{x^2+1} = 2 \Longleftrightarrow a = 2$.

$P(-1,2) \rightarrow 2 = \dfrac{a-b}{2} \rightarrow 4 = 2 - b \Rightarrow b = -2$.

ii) $Q(1,1)$ extremo relativo $\Longleftrightarrow \begin{cases} y(1) = 1 \\ y'(1) = 0 \end{cases}$

$y' = \dfrac{(2ax+b)(x^2+1) - (ax^2+bx)2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{2ax^3+bx^2+2ax+b-2ax^3-2bx^2}{(x^2+1)^2}$

$y' = \dfrac{-bx^2+2ax+b}{(x^2+1)^2}$

$y(1) = 1 \rightarrow \dfrac{a+b}{2} = 1$

$y'(1) = 0 \rightarrow \dfrac{-b+2a+b}{4} = 0 \rightarrow 2a = 0 \rightarrow \boxed{a=0}$

$\dfrac{b}{2} = 1 \rightarrow \boxed{b=2}$

iii) $y = \dfrac{2x}{x^2+1}$ Dom $f = \mathbb{R}$, continua y derivable en su dominio

$$y' = \frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}$$

$y' = 0 \rightarrow x^2 = 1 \iff x = \pm 1$

$y'<0$ $\searrow$ -1 $y'>0$ $\nearrow$ 1 $y'<0$ $\searrow$

$m(-1,-1)$ $M(1,1)$

crecimiento $(-1,1)$

decrecimiento $(-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$.

$$y'' = \frac{-4x(x^2+1)^2 - (-2x^2+2)\,2(x^2+1).2x}{(x^2+1)^4} =$$

$$= \frac{-4x(x^2+1) - 4x(-2x^2+2)}{(x^2+1)^3} = \frac{4x^3-12x}{(x^2+1)^3}$$

$y''=0 \rightarrow 4x^3-12x=0 \rightarrow 4x(x^2-3)=0$ $\nearrow x=0$, $\searrow x = \pm\sqrt{3}$

$y''<0$ $\cap$ $-\sqrt{3}$ $y''>0$ $\cup$ 0 $y''<0$ $\cap$ $\sqrt{3}$ $y''>0$ $\cup$

Puntos de inflexion $\left(-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $(0,0)$, $\left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

3 a) $$I = \underbrace{\int x \operatorname{sen} 3x \, dx}_{I_1} + \underbrace{\int \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\operatorname{sen}^2 x}} \, dx}_{I_2}$$

$$I_1 = -\frac{x\cos 3x}{3} + \frac{1}{3}\int \cos 3x \, dx = -\frac{x\cos 3x}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{\operatorname{sen} 3x}{3} + C_1$$

$u = x \rightarrow du = dx$

$dv = \operatorname{sen} 3x \, dx \rightarrow v = -\dfrac{\cos 3x}{3}$

$$I_2 = \int t^{-2/3} \, dt = \frac{t^{1/3}}{1/3} = 3\sqrt[3]{\operatorname{sen} x} + C_2$$

$t = \operatorname{sen} x$; $dt = \cos x \, dx$

Por lo tanto, $$I = -\frac{x\cos 3x}{3} + \frac{\operatorname{sen} 3x}{9} + 3\sqrt[3]{\operatorname{sen} x} + C$$

b) $\int_0^1 x^3 \cdot \ln(x^4+1)\,dx = \frac{1}{4}\int_1^2 \ln t\,dt \underset{\uparrow}{=}$
por partes

$t = x^4+1 \quad ; \quad dt = 4x^3\,dx$

si $x=0 \rightarrow t=1$

si $x=1 \rightarrow t=2$

$u = \ln t \rightarrow du = \frac{1}{t}\,dt$

$dt = dv \rightarrow v = t$

$= \frac{1}{4}\left(t\ln t\Big]_1^2 - \int_1^2 dt \right) = \frac{1}{4}\left(2\ln 2 - [t]_1^2 \right) =$

$= \frac{1}{4}(2\ln 2 - 1) = \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{4}$

4

a) $\int \arccos 2x\,dx = x\arccos 2x + 2\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-4x^2}}$

$u = \arccos 2x \rightarrow du = \frac{-2}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx$

$dv = dx \rightarrow v = x$

$t = 1-4x^2$

$dt = -8x\,dx$

$= x\arccos 2x + \frac{2}{-8}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = x\arccos 2x - \frac{1}{4}\,2\sqrt{1-4x^2} + C$

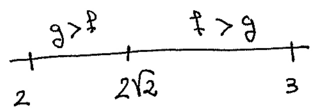
$= x\arccos 2x - \frac{1}{2}\sqrt{1-4x^2} + C$

b) $f(x) = x$

$g(x) = \frac{7x}{x^2-1}$ y las rectas $x=2$, y, $x=3$

$f(x) = g(x) \iff x = \frac{7x}{x^2-1} \rightarrow 7x = x^3 - x \rightarrow x^3 - 8x = 0$

$x(x^2-8) = 0$ $\nearrow x=0$, $\searrow x = \pm\sqrt{8}$



$A = \int_2^{2\sqrt{2}} \left(-x + \frac{7x}{x^2-1}\right)dx + \int_{2\sqrt{2}}^3 \left(x - \frac{7x}{x^2-1}\right)dx =$

$\int \left(\frac{7x}{x^2-1} - x\right)dx = \frac{7}{2}\ln|x^2-1| - \frac{x^2}{2}$

$= \left[\frac{7}{2}\ln|x^2-1| - \frac{x^2}{2}\right]_2^{2\sqrt{2}} + \left[\frac{x^2}{2} - \frac{7}{2}\ln|x^2-1|\right]_{2\sqrt{2}}^3 =$

$= \left[\left(\frac{7}{2}\ln 7 - 4\right) - \left(\frac{7}{2}\ln 3 - 2\right)\right] + \left[\left(\frac{9}{2} - \frac{7}{2}\ln 8\right) - \left(4 - \frac{7}{2}\ln 7\right)\right] =$

$= \frac{7}{2}\ln 7 - \frac{7}{2}\ln 3 - \frac{7}{2}\ln 8 + \frac{7}{2}\ln 7 - 4 + 2 + \frac{9}{2} - 4 = \frac{7}{2}\ln\frac{49}{24} - \frac{3}{2} \quad u^2$

EVALUACIÓN: CURSO: 2º B.C.T. FECHA: EXAMEN: Rec

1.- a) Halla los valores de a y b para que la función f sea derivable en R

$$f(x) = \begin{cases} \ln(e + senx) & si\ x < 0 \\ x^3 + ax + b & si\ x \geq 0 \end{cases}$$ ***(4 puntos)***

b) Calcula las dimensiones de los catetos de un triángulo rectángulo de hipotenusa $\sqrt{200}$ metros y área máxima. ***(4 puntos)***

c) Deriva y simplifica: $f(x) = sen\sqrt{x} \cdot arctgx^2$ ***(2 puntos)***

2.- a) Halla el valor de a y b para que se cumpla : $\lim_{x \to 0} \frac{ax^2+bx+1-\cos x}{sen\ (x^2)} = 1$ ***(5 puntos)***

b) $\lim_{x \to +\infty} \left[\left(\frac{x^2}{x+3}\right) \ln\left(\frac{x+5}{x-1}\right)\right]$ ***(3 puntos)***

c) Deriva y simplifica: $f(x) = \frac{\ln x + 4}{e^{x^3}}$ ***(2 puntos)***

3.- a) Sea la función $f(x) = 2x^3 + 12x^2 + ax + b$ .Determina los valores de a y b sabiendo que la recta tangente a f en su punto de inflexión es $y = 2x + 3$ ***(5 puntos)***

b) Calcular: $\int \frac{x+36}{9x^2+36} dx$ ***(5 puntos)***

4.- a) Calcula $\int_1^e \sqrt{x}\ ln^2 x\ dx$ ***(5 puntos)***

b) Halla el área del recinto limitado por la gráfica de la función $f(x) = sen\ x$ y las rectas tangentes a dicha gráfica en los puntos de abscisa x = 0 y x= π. ***(5 puntos)***

EVALUACIÓN: 3ª **CURSO: 2º B.C.T.** **FECHA: 16/3/21** **EXAMEN: 5º**

1) ***a)*** En un bar se puede pedir en la barra, en la mesa interior o en la terraza. Los precios de la mesa interior son un 10 % más caros que los de la barra y los precios de la terraza son un 20 % más caros que los de la barra. En la barra he pagado por 3 cafés, 2 refrescos y 1 bocadillo 12 €, en la mesa interior he pagado por 1 café, 1 refresco y 2 bocadillos 14´3 € y en la terraza he pagado por 2 refrescos y 2 bocadillos 16´8 € ¿cuánto cuesta cada café, cada refresco y cada bocadillo en la barra?

(Resuélvelo por el método de Gauss) (5 puntos)

b) Calcula razonadamente $\begin{vmatrix} a+1 & b+1 & c+1 \\ a+c & b+c & 2c \\ a-c & b-c & 0 \end{vmatrix}$

(No se puede aplicar la regla de Sarrus) (5 puntos)

2) ***a)*** Dadas la matrices: $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

Resuelve ***"cuando se pueda"*** las siguientes ecuaciones matriciales:

i) $A \cdot A^t \cdot X = C$ **ii)** $A^t \cdot A \cdot X = B$ **iii)** $X \cdot B + X = B^2$ (6 puntos)

b) Resuelve la siguiente ecuación: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ x+1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & x+1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & x+1 \end{vmatrix} = 3x$ (4 puntos)

3) Dada la siguiente matriz: $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & x & 1 \\ -4 & 4 & x \end{pmatrix}$

a) Calcula x para que se cumpla que $A^2 = 2A - I_3$ (4 puntos)
b) Para el caso $x = -1$ comprueba que se cumple que $A + A^{-1} = 2I_3$ (4 puntos)
c) Para el caso $x = -1$ calcula $(A - I_3)^n$ (2 puntos)

4) ***a)*** Dado el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} ax - y - 4z = 1 \\ x + ay - 2z = -1 \\ y + z = -a \end{array}\right\}$$

Discutirlo según los valores del parámetro ***"a"*** y resolverlo cuando sea compatible indeterminado (5 puntos)

b) Dado el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} mx + y = 7 \\ x + my = 5 \\ x + y = m \end{array}\right\}$$

Discutirlo según los valores del parámetro ***"m"*** y resolverlo cuando sea compatible determinado (5 puntos)

① a) precios en barra café x refresco y bocadillo z

(5p)

mesa $1'1x$ $1'1y$ $1'1z$

terraza $1'2x$ $1'2y$ $1'2z$

$$\left.\begin{array}{r} 3x+2y+z=12 \\ 1'1x+1'1y+2'2z=14'3 \\ 2'4y+2'4z=16'8 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{r} 3x+2y+z=12 \\ x+y+2z=13 \\ y+z=7 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 13 \\ 3 & 2 & 1 & 12 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2-3F_1]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 13 \\ 0 & -1 & -5 & -27 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3+F_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 13 \\ 0 & -1 & -5 & -27 \\ 0 & 0 & -4 & -20 \end{array}\right)$$

$-4z=-20 \rightarrow z=5.$

$-y-5.5=-27 \rightarrow -y=-2 \rightarrow y=2$

$x+2+10=13 \rightarrow x=1.$

b) (5p)

$$\begin{vmatrix} a+1 & b+1 & c+1 \\ a+c & b+c & 2c \\ a-c & b-c & 0 \end{vmatrix} \underset{\substack{F_2-F_1 \\ F_3-F_1}}{=} \begin{vmatrix} a+1 & b+1 & c+1 \\ c-1 & c-1 & c-1 \\ -c-1 & -c-1 & -c-1 \end{vmatrix} =$$

$$=(c-1)(-c-1)\begin{vmatrix} a+1 & b+1 & c+1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

↳ $F_2=F_3$

② a) i) $A \cdot A^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

(2p) $|A \cdot A^t| = 6-4=2 \neq 0 \Rightarrow \exists \ (A \cdot A^t)^{-1} = D$

$D = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$X = D \cdot C = \begin{pmatrix} 3/2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 & 6 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

ii) $A^t \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(1p)

$|A^t A| = 4+2+2-4-2-2=0 \Rightarrow \nexists (A^t A)^{-1} \Rightarrow \nexists$ sol.

iii) $X(B+I)=B^2$

(3p)

$$B+I=\begin{pmatrix}2&0&-1\\0&2&1\\1&-1&1\end{pmatrix} \qquad |B+I| = 4+2+2 = 8 \neq 0 \qquad \exists\,(B+I)^{-1}$$

$$(B+I)^{-1}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}3&1&2\\1&3&-2\\-2&2&4\end{pmatrix}$$

$$X = B^2(B+I)^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&0&1\\1&-1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1&2\\1&3&-2\\-2&2&4\end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix}3&1&-6\\1&3&6\\6&-6&-4\end{pmatrix}$$

b) (4p)

$$\begin{vmatrix}1&1&1&-1\\x+1&1&1&-1\\1&x+1&1&-1\\1&1&1&x+2\end{vmatrix}=3x$$

$$\downarrow \begin{array}{l}F_2-F_1\\F_3-F_1;\ F_4-F_1\end{array}$$

$$\begin{vmatrix}1&1&1&-1\\x&0&0&0\\0&x&0&0\\0&0&0&x+2\end{vmatrix}=3x;\ \xrightarrow[\text{desarrollo } C_3]{} \begin{vmatrix}x&0&0\\0&x&0\\0&0&x+2\end{vmatrix}=3x$$

$$x^2(x+2)=3x \rightarrow x^3+2x^2-3x=0 \rightarrow x(x^2+2x-3)=0 \begin{cases} x=0\\ x^2+2x-3=0 \quad x=\begin{cases}-3\\1\end{cases}\end{cases}$$

3 a) $A^2=\begin{pmatrix}5&-4&2\\2&x&1\\-4&4&x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&-4&2\\2&x&1\\-4&4&x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9&-12-4x&6+2x\\6+2x&x^2-4&4+2x\\-12-4x&16+8x&x^2-4\end{pmatrix}$

(4p)

$$2A-I=\begin{pmatrix}9&-8&4\\4&2x-1&2\\-8&8&2x-1\end{pmatrix} \rightarrow \left.\begin{array}{l}-12-4x=-8\\6+2x=4\\x^2-4=2x-1\\4+2x=2\\16+8x=8\end{array}\right\} \boxed{x=-1}$$

b) si $x = -1$ $\qquad I = 2A - A^2$

(4p) $\qquad I = (2I - A).A \Rightarrow A^{-1} = 2I - A$

entonces $\quad A + A^{-1} = A + 2I - A = 2I.$ $\qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 4 & -4 & 3 \end{pmatrix}$

c) $(A - I)^n$

(2p) $A - I = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -4 & 4 & -2 \end{pmatrix}$

$$(A - I)^2 = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -4 & 4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -4 & 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(A - I)^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ si } n \geq 2$$

4) $\left(\begin{array}{ccc|c} a & -1 & -4 & 1 \\ 1 & a & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -a \end{array}\right)$ $\qquad \begin{vmatrix} a & -1 & -4 \\ 1 & a & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = a^2 - 4 + 1 + 2a =$

(5p) $\qquad = a^2 + 2a - 3 = 0$

$\Rightarrow a = \begin{cases} -3 \\ 1 \end{cases}$

si $a \neq -3 \wedge a \neq 1. \rightarrow rg A = rg A^* = n^o$ incog $= 3 \rightarrow$ S.C.D

- si $a = -3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & -1 & -4 & 1 \\ 1 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2 \leftrightarrow F_1]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -2 & -1 \\ -3 & -1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2 + 3F_1]{}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & -10 & -10 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2 : (-10)]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \quad \left.\begin{array}{l} rg A = 2 \\ rg A^* = 3 \end{array}\right\} \text{S. I.}$$

- si $a = 1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2 - F_1]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

F_3 prop. a F_2

$rg\, A = rg\, A^* = 2 <$ nº incog. S.C. Ind.

$$\left.\begin{array}{l} x - y + 4z = 1 \\ y + z = -1 \end{array}\right\} \quad z = \lambda$$

$y = -1 - z \rightarrow y = -\lambda - 1$

$x = 1 + y + 4z \rightarrow x = 1 - \lambda - 1 + 4\lambda = 3\lambda$

sol. $(3\lambda, -\lambda - 1, \lambda) \quad \lambda \in \mathbb{R}$.

b)
(5p)

$$\left.\begin{array}{l} mx + y = 7 \\ x + my = 5 \\ x + y = m \end{array}\right\} \quad \begin{vmatrix} m & 1 & 7 \\ 1 & m & 5 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = m^3 + 5 + 7 - 7m - 5m - m =$$

$= m^3 - 13m + 12 =$

$= (m-1)(m+4)(m-3) = 0$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -13 & 12 \\ 1 & & 1 & 1 & -12 \\ \hline & 1 & 1 & -12 & \underline{0} \\ -4 & & -4 & 12 & \\ \hline & 1 & -3 & \underline{0} & \end{array}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -4 \\ m = 3 \end{array}}$$

- si $m \neq 1$, $m \neq -4$, $m \neq 3$ $\rightarrow$ $\left.\begin{array}{l} rg\, A^* = 3 \\ rg\, A \leq 2 \end{array}\right\}$ $rg\, A^* \neq rg\, A \Rightarrow$ S.I.

- si $m = 1$.

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 7 \\ x + y = 5 \\ x + y = 1 \end{array}\right\}$$

Sª incompatible $rg\, A^* = 2$, $rg\, A = 1$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

- si $m = -4$

$$\left.\begin{array}{l} -4x + y = 7 \\ x - 4y = 5 \\ x + y = -4 \end{array}\right\} \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -4 \\ 1 & -4 & 5 \\ -4 & 1 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 + 4F_1]{F_2 - F_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -4 \\ 0 & -5 & +9 \\ 0 & 5 & -9 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 + F_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -4 \\ 0 & -5 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$rg\, A = rg\, A^* = 2 =$ nº incog $\rightarrow$ S.C.D.

$$\left.\begin{array}{l} x + y = -4 \\ -5y = 9 \end{array}\right\} \Rightarrow y = -\frac{9}{5} \quad ; x = -4 - y = -4 + \frac{9}{5} = \frac{-11}{5}$$

- si $m = 3$

$$\left.\begin{array}{l} 3x + y = 7 \\ x + 3y = 5 \\ x + y = 3 \end{array}\right\} \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \end{array}\right) \rightarrow \text{SC.D}$$

$y = 1$

$x = 3 - y = 3 - 1 = 2$

EVALUACIÓN: 3ª **CURSO: 2º B.C.T.** **FECHA:** **EXAMEN: Rec Álgebra**

1.- a) *(3 puntos)* Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix}$

i) Calcula a y b para que $A^2 = 2\,A$

ii) Calcula A^{n} ,si la matriz A cumple la propiedad anterior.

b) *(3 puntos)* Resuelve la ecuación $AX - X = B$, donde A y B son las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

c) *(4 puntos)* La suma de las tres cifras de un número es 16, y la suma de la primera y la tercera es igual a la segunda. Permutando entre sí dichas cifras (primera y tercera) resulta un número que supera en 198 unidades al número dado. ¿Cuál es dicho número? ***(Resuélvelo por el método de Gauss)***

2.- a) *(4 puntos)* Calcula, sin utilizar la regla de Sarrus $\begin{vmatrix} a & b & c \\ -a+c & -b-a & -c+b \\ a+c & b-a & c+b \end{vmatrix}$

b) *(6 puntos)* Averigua, según el valor de a, el número de soluciones de

$$\begin{vmatrix} x^2 & a & a & a \\ a & x^2 & a & a \\ a & a & x^2 & a \\ a & a & a & x^2 \end{vmatrix} = 0$$

3.- a) *(4 puntos)* Estudia el rango de la matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & 1 & a \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix}$, según los valores del parámetro a

b) *(4 puntos)* Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \lambda \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ \lambda & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, donde λ es un número real. Encuentra los valores de λ para los que la matriz AB tiene inversa, y calcúlala

c) *(2 puntos)* Si $\begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = -5$, ¿cuál es el valor de cada uno de lo siguientes determinantes? Justifica las respuestas.

i) $\begin{vmatrix} m & 5m \\ p & 5p \end{vmatrix}$ ii) $\begin{vmatrix} m+3n & p+3q \\ n & q \end{vmatrix}$ iii) $\begin{vmatrix} p & 2m \\ q & 2n \end{vmatrix}$ iv) $\begin{vmatrix} 3n & -m \\ 3q & -p \end{vmatrix}$

4.- Dado el siguiente sistema de ecuaciones que depende del parámetro a

$$\begin{cases} x + z = 1 \\ y + (a-1)z = 0 \\ x + (a-1)y + az = a \end{cases}$$

a) *(5 puntos)* Discute el sistema, según el valor del parámetro a

b) *(5 puntos)* Resuélvelo en el caso que sea compatible

EVALUACIÓN: 3ª **CURSO: 2º B.C.T.** **FECHA: 5/5/21** **EXAMEN: 6º**

1) Dados los vectores $\vec{u} = (1, -2, 1)$, $\vec{v} = (1, 3, 1)$ y $\vec{w} = (2, m, n)$

a) Calcula ***m*** y ***n*** para que los tres vectores sean coplanarios y $|\vec{w}| = 3$. Para los valores de ***m*** y ***n*** calculados escribe el vector $\vec{w}$ como combinación lineal del vector $\vec{u}$ y el vector $\vec{v}$ ***(3 puntos)***

b) Calcula ***m*** y ***n*** para que el vector $\vec{w}$ sea ortogonal a los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ ***(2 puntos)***

c) Comprueba que los vectores $\vec{u} + \vec{w}$ y $\vec{v} + \vec{w}$ no pueden ser nunca paralelos para ningún valor de ***m*** y ***n*** ***(2 puntos)***

d) Calcula ***m*** y ***n*** para que el tetraedro generado por los 3 vectores tenga un volumen de 5 u^3 y además el vector $\vec{w}$ sea perpendicular al vector $\vec{u} + \vec{v}$ ***(3 puntos)***

2) Dados los puntos P (2 , 1, -2) , Q (0 , 3, 2) , R (3, -1 ,1) y S (x ,y ,0)

a) Encuentra un punto T entre P y Q que diste de P el triple que de Q ***(2 puntos)***

b) Calcula **x** e **y** para que el punto S esté en el plano $\pi: x - 2y + 3z = 0$ y el triángulo PQS sea un triángulo rectángulo con ángulo recto en P ***(2 puntos)***

c) Para **x = y = 1** calcula el punto de corte del plano que determinan los puntos P , Q y R con la recta perpendicular al plano anterior que pasa por S ***(4 puntos)***

d) Para **x = y = 1** calcula la ecuación general del plano con vectores direccionales $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{QR}$ que pasa por el punto S ***(2 puntos)***

3) Dadas las rectas $r: \begin{cases} x + y - 5z = 0 \\ x - y - 3z + 2 = 0 \end{cases}$ y $s: \frac{x+3}{2} = \frac{y+1}{m} = \frac{z-1}{0}$

a) Calcula su posición relativa en función de ***m*** ***(3 puntos)***

b) Para el caso ***m = 0*** calcula la distancia entre las rectas ***(2 puntos)***

c) Para el caso ***m = 1*** calcula el punto de corte de las dos rectas y el plano que las contiene ***(5 puntos)***

4) Dada la recta r : (x , y , z) = (-1 , 1, 3) + t (4 , -4 , m) y el plano $\pi: \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = \lambda + \mu \\ z = 1 - 2\mu \end{cases}$

a) Calcula ***m*** para que el plano y la recta sean paralelos. En este caso calcula su distancia. ***(3 puntos)***

b) Calcula ***m*** para que el plano y la recta sean perpendiculares. En este caso calcula su punto de corte ***(4 puntos)***

c) Calcula el área del triángulo que determinan los puntos de corte del plano con los ejes de coordenadas. ***(3 puntos)***

1) a) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & m & n \end{vmatrix} = 3n + m - 4 - 6 - m + 2n =$

$= 5n - 10 = 0$

$\sqrt{4+m^2+n^2} = 3$. $4+m^2+n^2 = 9$; $m^2+n^2 = 5$

$\left.\begin{array}{l} 5n - 10 = 0 \\ m^2+n^2 = 5 \end{array}\right\} \to n = 2$

$m^2+4 = 5$; $m^2 = 1$; $m = \pm 1$

$\underline{\underline{m = 1 \quad n = 2}}$ y $\underline{\underline{m = -1 \quad n = 2}}$ $(2,1,2)$ y $(2,-1,2)$

$(2,1,2) = \alpha(1,-2,1) + \beta(1,3,1)$

$\left.\begin{array}{l} \alpha + \beta = 2 \\ -2\alpha + 3\beta = 1 \\ \alpha + \beta = 2 \end{array}\right\} \boxed{\begin{array}{l} \alpha = 1 \\ \beta = 1 \end{array}}$

$(2,-1,2) = \alpha(1,-2,1) + \beta(1,3,1)$

$\left.\begin{array}{l} \alpha + \beta = 2 \\ -2\alpha + 3\beta = -1 \\ \alpha + \beta = 2 \end{array}\right\} \boxed{\begin{array}{l} \alpha = \frac{7}{5} \\ \beta = \frac{3}{5} \end{array}}$

b) $\left.\begin{array}{l} 2 - 2m + n = 0 \\ 2 + 3m + n = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} -2m + n = -2 \\ 3m + n = -2 \end{array}\right\} \boxed{\begin{array}{l} m = 0 \\ n = -2 \end{array}}$

$(2,0,-2)$

c) $\overline{u} + \overline{w} = (3, m-2, n+1)$

$\overline{v} + \overline{w} = (3, m+3, n+1)$

¿ $\frac{3}{3} = \frac{m+3}{m-2} = \frac{n+1}{n+1}$?

$\frac{3}{3} \to 1$, $\frac{n+1}{n+1} \to 1$

$m + 3 = m - 2$

$0 = -5$

No tiene solución

d)

$$V_{Tetraedo} = \frac{\left| \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & m & m \end{vmatrix} \right|}{6} = \frac{|5m-10|}{6} = 5$$

$|5m-10| = 30$ → $5m-10=30 \Rightarrow 5m=40;\ m_1=\frac{40}{5}=8$

→ $5m-10=-30 \Rightarrow 5m=-20;\ m_2=\frac{-20}{5}=-4$

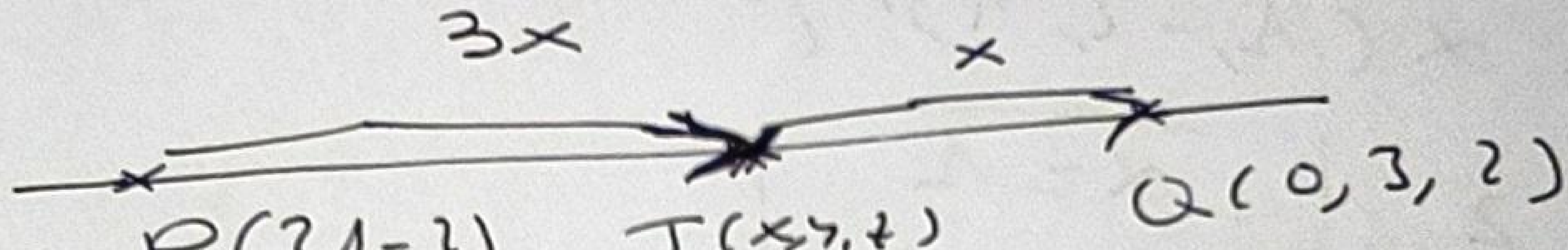
$\overline{u}+\overline{v}=(2,1,2)$ $\quad \overline{w}_1=(2,m,8)$

$\overline{w}_2=(2,m,-4)$

$4+m+16=0;\quad m_1=-20 \rightarrow (2,-20,8)$

$4+m-8=0;\quad m_2=4 \rightarrow (2,4,-4)$

2) a)



$\overrightarrow{PT}=3\overrightarrow{TQ};\quad (x-2,\ y-1,\ z+2)=3(-x,\ 3-y,\ 2-z)$

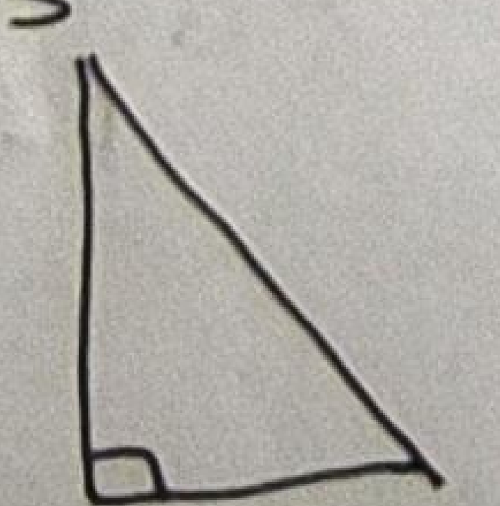
$x-2=-3x \rightarrow x=\frac{1}{2}$

$y-1=9-3y \rightarrow y=\frac{5}{2}$

$z+2=6-3z \rightarrow z=1$

$T\left(\frac{1}{2},\frac{5}{2},1\right)$

b)



$\overline{PQ}=(-2,2,4)$

$\overline{PS}=(x-2,\ y-1,\ 2)$

$-2(x-2)+2(y-1)+8=0 \quad \left\{ \begin{array}{l} -2x+4+2y-2+8=0 \\ x-2y=0 \end{array} \right.$

$x-2y=0$

$\left.\begin{array}{l} -2x+2y=-10 \\ x-2y=0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x-y=5 \\ x-2y=0 \end{array}\right\} \quad \boxed{\begin{array}{l} x=10 \\ y=5 \end{array}}$

c) $\overrightarrow{PQ}\ (-2, 2, 4)$

$\overrightarrow{PR}\ (1, -2, 3)$ $\quad \vec{n} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -2 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = (14, 10, 2)$

$S (1, 1, 0)$ $\quad 14 \cdot 2 + 10 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) + D = 0$

$14x + 10y + 2z + D = 0;$ $\quad D = -34;$ $\quad 14x + 10y + 2z - 34 = 0$

$28 + 10 - 4 + D = 0;$

$\pi: 7x + 5y + z - 17 = 0$

$$r: \begin{cases} x = 1 + 7t \\ y = 1 + 5t \\ z = t \end{cases}$$

$7(1 + 7t) + 5(1 + 5t) + t - 17 = 0;$ $\quad 7 + 49t + 5 + 25t + t - 17 = 0$

$75t = 5;$ $\quad t = \frac{5}{75} = \frac{1}{15}$ $\quad \boxed{I = \left(\frac{22}{15}, \frac{20}{15}, \frac{1}{15}\right)}$

d) $\overrightarrow{PQ}\ (-2, 2, 4)$

$\overrightarrow{QR}\ (3, -4, -1)$ $\quad \vec{\mu} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -2 & 2 & 4 \\ 3 & -4 & -1 \end{vmatrix} = (14, 10, 2)$

$S(1, 1, 0)$

$14x + 10y + 2z + D = 0;$ $\quad 14 \cdot 1 + 10 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + D = 0$

$14 + 10 + D = 0;$ $\quad D = -24$

$14x + 10y + 2z - 24 = 0$

$\boxed{\pi: 7x + 5y + z - 12 = 0}$

3)

a) $\overline{u_r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = (-8, -2, -2)$

$\overline{u_s} = (2, m, 0)$

$\overrightarrow{P_rP_s}(-2, -2, 1)$

$P_s(-3, -1, 1)$

$P_r(-1, +1, 0)$

$(z = 0)$

$\begin{vmatrix} -8 & -2 & -2 \\ 2 & m & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -8m + 8 - 4m + 4 = -12m + 12$

¿ $\overline{u_r} \parallel \overline{u_s}$? ¿ $\frac{2}{-8} = \frac{m}{-2} = \frac{0}{-2}$? NO

$-12m + 12 = 0 \Rightarrow m = 1$

Si $m = 1 \Rightarrow$ SECANTES

Si $m \neq 1 \Rightarrow$ SE CRUZAN

b) $\overline{u_r} \wedge \overline{u_s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -8 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0, -4, 4)$

$|-12 \cdot 0 + 12| = |12| = 12$

$d(r, s) = \frac{12}{\sqrt{0+16+16}} = \frac{12}{\sqrt{32}} = \frac{12}{4\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}\ u$

c) $r: \begin{cases} x = -1 - 8t_1 \\ y = 1 - 2t_1 \\ z = -2t_1 \end{cases}$ $\qquad s: \begin{cases} x = -3 + 2t_2 \\ y = -1 + t_2 \\ z = 1 \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} -1-8t_1=-3+2t_2 \\ 1-2t_1=-1+t_2 \\ -2t_1=1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} t_2=3 \\ t_1=-\frac{1}{2} \end{array}$$

$$I=(3,2,1)$$

$$\overrightarrow{u_r}\wedge\overrightarrow{u_s}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -8 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}=(2,-4,-4)$$

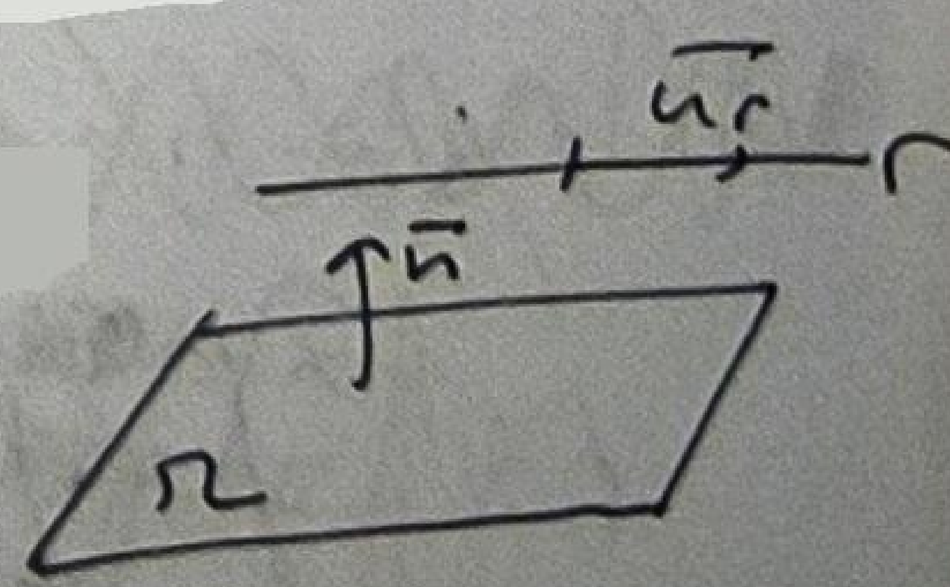
$$2x-4y-4z+D=0;\quad 2(-1)-4\cdot 1-4\cdot 0+D=0$$

$$-2-4+D=0;\quad D=6$$

$$2x-4y-4z+6=0 \qquad \boxed{x-2y-2z+3=0}$$

4) a) $\overrightarrow{u_r}=(4,-4,m)$

$$\vec{n}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}=(-2,2,1)$$



$$\overrightarrow{u_r}\perp\vec{n}$$

$$\overrightarrow{u_r}\cdot\vec{n}=0;\quad -8-8+m=0;\quad \boxed{m=16}$$

$P_\pi = (2, 0, 1) \qquad -2x + 2y + z + D = 0$

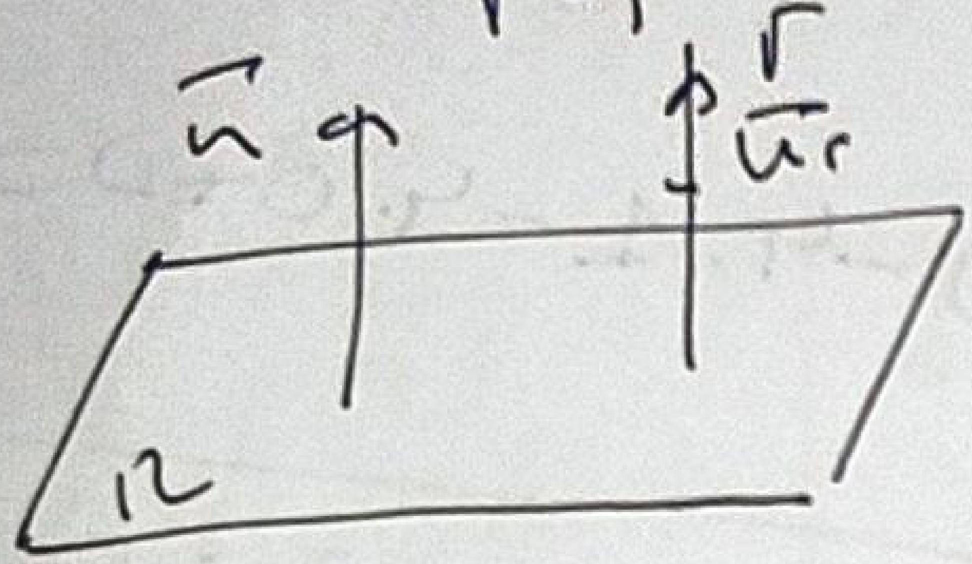
$-2\cdot 2 + 2\cdot 0 + 1 + D = 0; \quad -4 + 1 + D = 0; \quad D = 3$

$-2x + 2y + z + 3 = 0 \qquad \pi: 2x - 2y - z - 3 = 0$

$P_r(-1, 1, 3); \quad d(r,\pi) = d(P_r,\pi) = \dfrac{|2(-1) - 2\cdot 1 - 3 - 3|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-1)^2}} =$

$= \dfrac{|-2-2-3-3|}{\sqrt{9}} = \dfrac{|-10|}{3} = \dfrac{10}{3}\ u$

b)



$\vec{u}_r \parallel \vec{n}$

$\dfrac{4}{-2} = \dfrac{-4}{2} = \dfrac{m}{1} \Rightarrow m = -2$

$r: \begin{cases} x = -1 - 2t \\ y = 1 + 2t \\ z = 3 + t \end{cases} \qquad 2(-1-2t) - 2(1+2t) - (3+t) - 3 = 0$

$-2 - 4t - 2 - 4t - 3 - t - 3 = 0$

$-9t - 10 = 0; \quad t = -\dfrac{10}{9}$

$\boxed{I\left(\dfrac{11}{9}, -\dfrac{11}{9}, \dfrac{17}{9}\right)}$

c) $2x - 2y - z - 3 = 0$

$x = y = 0 \rightarrow -z - 3 = 0; \; z = -3 \rightarrow A(0, 0, -3)$

$x = z = 0 \rightarrow -2y - 3 = 0, \; y = -\frac{3}{2} \rightarrow B(0, -\frac{3}{2}, 0)$

$y = z = 0 \rightarrow 2x - 3 = 0 \; x = \frac{3}{2} \rightarrow C(\frac{3}{2}, 0, 0)$

$\overrightarrow{AB} = (0, -\frac{3}{2}, 3)$

$\overrightarrow{AC} = (\frac{3}{2}, 0, 3)$

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -\frac{3}{2} & 3 \\ \frac{3}{2} & 0 & 3 \end{vmatrix} = \left(-\frac{9}{2}, \frac{9}{2}, \frac{9}{4}\right)$$

$$A = \frac{\sqrt{(-\frac{9}{2})^2 + (\frac{9}{2})^2 + (\frac{9}{4})^2}}{2} = \frac{\sqrt{\frac{81}{4} + \frac{81}{4} + \frac{81}{16}}}{2} = \frac{\sqrt{729}}{8} =$$

$$= \frac{27}{8} u^2$$

EVALUACIÓN: 3ª **CURSO: 2º B.C.T.** **FECHA:** **EXAMEN: Rec . Geometría**

1) **a)** Calcula el valor de x para que los vectores $\vec{u} = (1, x, 0)$ y $\vec{v} = (x+3, 2, -8)$ sean ortogonales y , para ese valor obtenido, calcula el área del paralelogramo determinado por los dos vectores. ***(3 puntos)***

b) Se considera el plano π que pasa por los puntos P(1, 1, 3), Q(2, 1, 0) y R(-1, - 4, -1). Encuentra el punto de π que más cerca está del punto S (-3, 1, 1) . ***(5 puntos)***

c) Halla el simétrico del punto S respecto del plano π ***(2 puntos)***

2) **a)** Si $\vec{w}$ y $\vec{s}$ verifican $|\vec{w}| = |\vec{s}| = 2$ y el ángulo que forman es de 60º. Calcula $\vec{w} \cdot (\vec{w} - \vec{s})$ ***(2 puntos)***

b) Dado el punto P(1, -1, 0) y las rectas $r \equiv \begin{cases} 2x - y - 2z + 1 = 0 \\ 3x - y - 4z + 6 = 0 \end{cases}$ y $s \equiv \frac{1-x}{-1} = \frac{y}{0} = \frac{z+1}{1}$

Halla la ecuación general del plano π paralelo a las rectas r y s , y tal que distancia del punto a dicho plano sea 2 unidades. ***(4 puntos)***

c) Dadas las rectas $r: \frac{x+2}{-2} = y - 3 = \frac{z+k}{-2}$ y $s: \begin{cases} x = -4 + 4t \\ y = -1 + 3t \\ z = -4 + 5t \end{cases}$ Calcula el valor de k para que las rectas se corten, y determina dicho punto de corte. ***(4 puntos)***

3) **a)** Determina el valor o valores de m, para que la recta $r \equiv \begin{cases} mx + y = 2 \\ x + m\,z = 3 \end{cases}$ sea paralela al plano $\pi \equiv 2x - y - z + 6 = 0$ ***(3 puntos)***

b) Para m = -1, calcula la distancia de la recta r al plano π ***(3 puntos)***

c) Halla la ecuación general del plano perpendicular a π y que contiene a la recta $s \equiv \frac{x-1}{2} = y + 2 = \frac{z}{3}$ ***(4 puntos)***

4) Dados el punto A(2,1,1) y la recta $r \equiv \begin{cases} x = -t \\ y = 0 \\ z = -2 - 7t \end{cases}$

a) Halla la ecuación del plano que pasa por el punto A y contiene a la recta r ***(3 puntos)***

b) Calcula la distancia del punto A a la recta r ***(3 puntos)***

c) Halla el simétrico del punto A respecto a la recta r ***(4 puntos)***

1

1) a) $x+3+2x=0$; $3x=-3$; $\boxed{x=-1}$

$$\vec{u}\wedge\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -1 & 0\\ 2 & 2 & -8\end{vmatrix}=(8,8,4)$$

$$A=\sqrt{8^2+8^2+4^2}=\sqrt{144}=\boxed{12\,u^2}$$

b) $\overrightarrow{PQ}(1,0,-3)$ $\quad\overrightarrow{PR}(-2,-5,-4)$

$$\vec{n}=\overrightarrow{PQ}\wedge\overrightarrow{QR}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 0 & -3\\ -2 & -5 & -4\end{vmatrix}=(-15,10,-5)$$

$-15x+10y-5z+D=0$; $\quad -15+10-15+D=0$

$D=20$; $\quad -15x+10y-5z+20=0$

π: $3x-2y+z-4=0$

$$r:\left|\begin{array}{l} x=-3+3t\\ y=1-2t\\ z=1+t\end{array}\right.$$

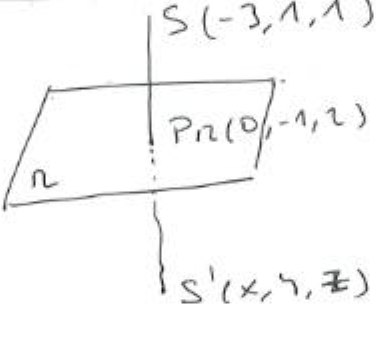
$3(-3+3t)-2(1-2t)+(1+t)-4=0$

$-9+9t-2+4t+1+t-4=0$

$14t=14$; $\quad t=1$

$$\boxed{P_\pi(0,-1,2)}$$

c)



$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{x-3}{2}=0\\[2mm] \dfrac{y+1}{2}=-1\\[2mm] \dfrac{z+1}{2}=2\end{array}\right\}\begin{array}{l}x=3\\ y=-3\\ z=3\end{array}$$

$$\boxed{S'(3,-3,3)}$$

②

2)

a) $\vec{w}\cdot(\vec{w}-\vec{s}) = \vec{w}\cdot\vec{w} - \vec{w}\cdot\vec{s} =$

$= |\vec{w}|\,|\vec{w}|\cos(\underbrace{\widehat{\vec{w},\vec{w}}}_{0°}) - |\vec{w}|\cdot|\vec{s}|\cos(\underbrace{\widehat{\vec{w},\vec{s}}}_{60°}) =$

$= 2\cdot 2\cdot 1 - 2\cdot 2\cdot \frac{1}{2} = 4-2 = \boxed{2}$

b) $\vec{u_r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & -1 & -4 \end{vmatrix} = (2, 2, 1)$

$\vec{u_s} = (1, 0, 1)$

$\vec{n} = \vec{u_r} \wedge \vec{u_s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (2, -1, -2)$

$\pi: 2x - y - 2z + D = 0$

$d(P,\pi) = \dfrac{|2\cdot 1 - (-1) - 2\cdot 0 + D|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2}} = \dfrac{|3+D|}{3} = 2$

$|3+D| = 6$ $\begin{cases} 3+D = 6 \to D = 3 \to \pi_1: 2x-y-2z+3=0 \\ 3+D=-6 \to D=-9 \to \pi_2: 2x-y-2z-9=0 \end{cases}$

c) $\vec{u_r} = (-2, 1, -2)$ $\qquad \vec{u_s}(4, 3, 5)$

$P_r(-2, 3, -k)$ $\qquad P_s(-4, -1, -4)$

$\overrightarrow{P_rP_s}(-2, -4, k-4)$

$\begin{vmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 4 & 3 & 5 \\ -2 & -4 & k-4 \end{vmatrix} = -6(k-4) + 32 - 10 - 12 - 40$

$-4(k-4) = -6k + 24 + 32 - 10 - 12 - 40$

$-4k + 16 = -10k + 10 = 0$; $\boxed{k=1}$

$$r: \begin{cases} x = -2 - 2t_1 \\ y = 3 + t_1 \\ z = -1 - 2t_1 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = -4 + 4t_2 \\ y = -1 + 3t_2 \\ z = -4 + 5t_2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} -2 - 2t_1 &= -4 + 4t_2 \\ 3 + t_1 &= -1 + 3t_2 \\ -1 - 2t_1 &= -4 + 5t_2 \end{aligned} \quad \begin{cases} -2t_1 - 4t_2 = -2 \\ t_1 - 3t_2 = -4 \\ -2t_1 - 5t_2 = -3 \end{cases} \quad \begin{cases} t_1 = -1 \\ t_2 = 1 \end{cases}$$

$$\boxed{I = (0, 2, 1)}$$

3) a) $\overline{u_r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ m & 1 & 0 \\ 1 & 0 & m \end{vmatrix} = (m, -m^2, -1)$

$\vec{n}\,(2, -1, -1)$

$r // \pi \Rightarrow \overline{u_r} \perp \vec{n}$. $\overline{u_r} \cdot \vec{n} = 0$

$2m + m^2 + 1 = 0$; $m^2 + 2m + 1 = 0$

$m = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = \frac{-2 \pm 0}{2} = \begin{cases} -1 \\ -1 \end{cases}$ $\quad \boxed{m = -1}$

b) $r: \begin{cases} -x + y = 2 \\ x - z = 3 \end{cases}$ $\quad P_r(0, 2, -3)$

$$d(r, \pi) = d(P_r, \pi) = \frac{|2 \cdot 0 - 2 - (-3) + 6|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-1)^2}} =$$

$$= \frac{|7|}{\sqrt{6}} = \frac{7}{\sqrt{6}} = \frac{7\sqrt{6}}{6}\, u$$

c)

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (-2, -8, 4)$$

$$P_r = P_\pi = (1, -2, 0)$$

$-2x - 8y + 4z + D = 0$; $-2 + 16 + D = 0$; $D = -14$

$-2x - 8y + 4z - 14 = 0$; $\boxed{x + 4y - 2z + 7 = 0}$

4) a) $P_r(0, 0, -2)$ $A(2, 1, 1)$

$\vec{u_r}(-1, 0, -7)$

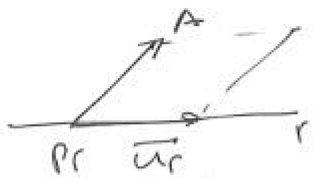
$\overrightarrow{P_rA}\ (2, 1, 3)$

$$\vec{n} = \overrightarrow{P_rA} \wedge \vec{u_r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -7 \end{vmatrix} = (-7, 11, 1)$$

$-7x + 11y + z + D = 0$; $0 + 0 + (-2) + D = 0$; $D = 2$

$-7x + 11y + z + 2 = 0$; $\boxed{\pi: 7x - 11y - z - 2 = 0}$

b)



$$d(A, r) = \frac{|\overrightarrow{P_rA} \wedge \vec{u_r}|}{|\vec{u_r}|} =$$

$$= \frac{\sqrt{(-7)^2 + 11^2 + 1^2}}{\sqrt{(-1)^2 + 0^2 + (-7)^2}} = \frac{\sqrt{49 + 121 + 1}}{\sqrt{1 + 0 + 49}} = \frac{\sqrt{171}}{\sqrt{50}} = \frac{3\sqrt{19}}{5\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{3\sqrt{38}}{10}\ u \ //$$

5

c) $-x-7z+D=0$; $-2-7+D=0$; $D=9$

$-x-7z+9=0$; $\boxed{x+7z-9=0}$

$(-t)+7(-2-7t)-9=0$; $-t-14-49t-9=0$

$-50t-23=0$; $t=\frac{-23}{50}$

$I\left(\frac{+23}{50}, 0, \frac{+61}{50}\right)$

$$I\begin{cases} x=\frac{+23}{50} \\ y=0 \\ z=-2+\frac{161}{50}= \end{cases}$$

$\frac{61}{50}$

$\frac{x+2}{2}=\frac{+23}{50}$; $x=\frac{+46}{50}-2$

$=\frac{-54}{50}=\frac{-27}{25}$

$\frac{y+1}{2}=0$; $y=-1$

$\frac{z+1}{2}=\frac{+61}{50}$; $z=-1+\frac{122}{50}=$

$=\frac{+72}{50}=\frac{36}{25}$

$$\boxed{A'\left(-\frac{27}{25}, -1, \frac{+36}{25}\right)}$$

CURSO: 2º B.C.T. **FECHA: 18/5/21** **EXAMEN: Final - Álgebra**

1) a) En una panadería fabrican panes de 100 gr, 200 gr y 500 gr. Cierto día se fabrican 160 panes en total, habiéndose fabricado tantos panes del tamaño grande como del pequeño y el mediano juntos. Sabiendo que el precio del kg de pan es de 5 € y que el importe total de los panes asciende a 255 €, calcula cuántos panes se han fabricado de cada tipo.

(Resuélvelo por el método de Gauss) ***(6 puntos)***

b) Resuelve la ecuación $\begin{vmatrix} x & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & x \end{vmatrix} = 0$ ***(4 puntos)***

2) a) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & m & 0 \\ 1 & m & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \\ m & 0 \end{pmatrix}$ halla los valores de m para que la matriz $A \cdot B$ tenga inversa ***(4 puntos)***

b) Para $m = 1$, halla la matriz $(A \cdot B)^{-1}$ ***(4 puntos)***

c) Para $m = 1$, halla la matriz X que cumple: $A \cdot B \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ ***(2 puntos)***

3) a) Buscar una matriz X cuyo primer elemento (a_{11}) valga 2 y tal que la suma

$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} X + X \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 11 & -1 \end{pmatrix}$ sea la matriz nula ***(6 puntos)***

b) Sabiendo que el determinante de la matriz $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ vale 4, calcula:

i) $\begin{vmatrix} 6d & 4e & 2f \\ 3g & 2h & i \\ 9a & 6b & 3c \end{vmatrix}$ **ii)** $\begin{vmatrix} d+f & e & f+e \\ a+c & b & c+b \\ g+i & h & i+h \end{vmatrix}$ ***(4 puntos)***

4) Estudia, según el valor de m y resuelve, cuando sea compatible, el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{r} (m+2)x + (m-1)y - z = 3 \\ mx - y + z = 2 \\ x + my - z = 1 \end{array}\right\}$$

(3 + 7 puntos)

CURSO: 2º B.C.T. **FECHA: 18/5/21** **EXAMEN: Final - Geometría**

1) a) Calcula la ecuación general del plano que contiene a la recta $r \equiv \begin{cases} 2x - y - 5 = 0 \\ 2x - 2z - 6 = 0 \end{cases}$

y es paralelo a la recta $s \equiv 1 - x = y = \dfrac{-z}{2}$ ***(4 puntos)***

b) Halla el punto del plano $\pi \equiv x + 2y - z + 3 = 0$ más próximo al punto $P(2,0,1)$ ***(6 puntos)***

2) a) Estudia la posición relativa de las rectas $r \equiv \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-1}{a} = \dfrac{z+1}{0}$ y $s \equiv \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = t \\ z = 2t \end{cases}$

según el valor del parámetro a ***(4 puntos)***

b) Halla el punto de corte en el caso de que sean secantes ***(6 puntos)***

3) a) Halla el volumen del paralelepípedo de vértices el punto $A(1,1,1)$ y los puntos de corte del plano $\pi \equiv x + y - z + 1 = 0$ con los ejes de coordenadas ***(4 puntos)***

b) Halla la ecuación de un plano perpendicular al plano $\pi \equiv x + y - z + 1 = 0$ y que contenga al eje OX ***(3 puntos)***

c) Halla la ecuación de un plano paralelo al plano $\pi \equiv x + y - z + 1 = 0$ que esté a 3 u de distancia del punto $A(1,1,1)$ ***(3 puntos)***

4) Dado el punto $A(0,1,1)$, la recta $r \equiv \dfrac{x}{0} = \dfrac{y-1}{-1} = z$ y el plano $\pi \equiv \begin{cases} x = 2 - \lambda - 2\mu \\ y = -1 + \lambda \\ z = \mu \end{cases}$,

se pide:

i) $d(A, r)$ ***(4 puntos)***

ii) $d(A, \pi)$ ***(4 puntos)***

iii) Ángulo que forman la recta y el plano ***(2 puntos)***

CURSO: 2º B.C.T. **FECHA: 20/5/21** **EXAMEN: Final – Análisis**

1) a) Dada la función $f(x) = \begin{cases} \ln\,(a\,x^2 + b) & si \quad x \le 1 \\ \sqrt{\dfrac{x^2 + x - 1}{x}} & si \quad x > 1 \end{cases}$ $\quad con \quad a\,,\, b > 0$

Calcula a y b para que la función sea derivable en la conexión ***(5 puntos)***

b) Dada la función $y = \ln \dfrac{1 - sen\,x}{1 + \cos x}$ calcula la ecuación de la recta tangente en el punto de abscisa ***x=0*** ***(5 puntos)***

2) a) Calcula $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \sqrt{\cos x}}{x^2}$ ***(4 puntos)***

b) Una hoja de papel debe contener 150 cm^2 de texto impreso. El margen superior tiene 2 cm y el inferior y los laterales 1 cm. Calcula las dimensiones de la hoja para que la superficie de la misma sea mínima ***(6 puntos)***

3) Dada la función $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$ calcula lo siguiente:

a) Asíntotas ***(3 puntos)***
b) Intervalos de crecimiento y decrecimiento. Máximos relativos, mínimos relativos y puntos de inflexión ***(5 puntos)***
c) Haz un esbozo de la gráfica ***(2 puntos)***

4) Calcula las siguiente integrales:

a) $\displaystyle\int \frac{4x^2 + 8x}{4x^2 + 1}\, dx$ ***(5 puntos)***

b) $\displaystyle\int x^2 \cos(2x - 1)\, dx$ ***(5 puntos)***

5) a) Calcula $\displaystyle\int \frac{tg\,(2 + \ln x)}{x}\, dx$ ***(5 puntos)***

b) Calcula el área de la región de plano limitada por las curvas siguientes:

$f(x) = x^2 + x$ y $g(x) = x^3 - x$ ***(5 puntos)***

ÁLGEBRA

① X = nº panes de 100 gr → 0'1 Kg
Y = " " 200 gr → 0'2 Kg
Z " " 500 gr → 0'5 Kg

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=160 \\ z=x+y \\ 0'5x+y+2'5z=255 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=160 \\ x+y-z=0 \\ x+2y+5z=510 \end{array}\right\} \xrightarrow[3^{\underline{a}}-1^{a}]{2^{\underline{a}}-1^{a}} \left.\begin{array}{l} x+y+z=160 \\ -2z=-160 \\ y+4z=350 \end{array}\right\} \quad z=80$$

$x+y+z=160$

$y=350-320=30$

$x+30+80=160 \to x=50$

b)

$$\begin{vmatrix} x & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & x \end{vmatrix} = 0 \longrightarrow \begin{vmatrix} x & -1 & 2 & 0 \\ x & 0 & 0 & -1 \\ 1-2x & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & x \end{vmatrix} = 0$$

$$+1 \begin{vmatrix} x & 0 & -1 \\ 1-2x & 0 & 1 \\ 3 & 2 & x \end{vmatrix} = 0 \; ; \; -2+4x-2x=0 \Rightarrow 2x-2=0 \to x=1$$

② $$\begin{pmatrix} 2 & m & 0 \\ 1 & m & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \\ m & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3m \\ 1+2m & 2m \end{pmatrix} = AB$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3m \\ 1+2m & 2m \end{vmatrix} = 0 \qquad 4m-3m-6m^2=0$$

$m-6m^2=0$

$m(1-6m)=0 \quad \begin{array}{l} \nearrow m=0 \\ \searrow m=\frac{1}{6} \end{array}$

si $m \neq 0 \quad m \neq \frac{1}{6}$ entonces $\exists (AB)^{-1}$

b) $$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5 \qquad \frac{1}{-5} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = (AB)^{-1} = \begin{pmatrix} -2/5 & 3/5 \\ 3/5 & -2/5 \end{pmatrix}$$

~~comprob. $\frac{1}{-5}\begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} = I$~~

c) $\begin{pmatrix}2&3\\3&2\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}0&5&0\\5&0&-5\end{pmatrix}$

$$X=(AB)^{-1}\begin{pmatrix}0&5&0\\5&0&-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2/5&+3/5\\3/5&2/5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&5&0\\5&0&-5\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}+3&-2&-3\\-2&3&+2\end{pmatrix}$$

3 a) $\begin{pmatrix}2&-2\\6&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&a\\b&c\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&a\\b&c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&-1\\11&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}4-2b&2a-2c\\12&6a\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2+11a&-2-a\\-b+11c&-b-c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

$2-2b+11a=0$

$a-2c-2=0 \rightarrow \boxed{a=2c+2}$

$12-b+11c=0$ $\qquad b-11c=12$

$6a-b-c=0$

$$\left\{\begin{array}{l}2-2b+22c+22=0\\12-b+11c=0\\12c+12-b-c=0\end{array}\right.$$

$b=12+11c.$

$$\left.\begin{array}{l}-2b+22c=-24\\-b+11c=-12\end{array}\right\}\qquad \begin{array}{r}b-11c=12\\-b+11c=-12\\\hline 0=0\end{array}$$

$\boxed{a=2c+2}$ $\qquad b,c\in\mathbb{R}.$

$$X=\begin{pmatrix}2&2c+2\\12+11c&c\end{pmatrix}$$

b) $\begin{vmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{vmatrix}=4$

i) $\begin{vmatrix}6d&4e&2f\\3g&2h&i\\9a&6b&3c\end{vmatrix}=6\begin{vmatrix}3d&2e&f\\3g&2h&i\\3a&2b&c\end{vmatrix}=36\begin{vmatrix}d&e&f\\g&h&i\\a&b&c\end{vmatrix}=$

$$=-36\begin{vmatrix}a&b&c\\g&h&i\\d&e&f\end{vmatrix}=36\begin{vmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{vmatrix}=36\cdot 4=144.$$

$$\begin{vmatrix} d+f & e & f+e \\ a+c & b & c+b \\ g+i & h & i+h \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d & e & f+e \\ a & b & c+b \\ g & h & i+h \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f & e & f+e \\ c & b & c+b \\ i & h & i+h \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{vmatrix} + \underbrace{\begin{vmatrix} d & e & e \\ a & b & b \\ g & h & h \end{vmatrix}}_{=0} + \underbrace{\begin{vmatrix} f & e & f \\ c & b & c \\ i & h & i \end{vmatrix}}_{=0} + \underbrace{\begin{vmatrix} f & e & e \\ c & b & b \\ i & h & h \end{vmatrix}}_{=0} =$$

$$= - \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -4.$$

④ $$\left.\begin{aligned} (m+2)x + (m-1)y - z &= 3 \\ mx - y + z &= 2 \\ x + my - z &= 1 \end{aligned}\right\}$$

$$\begin{vmatrix} m+2 & m-1 & -1 \\ m & -1 & 1 \\ 1 & m & -1 \end{vmatrix} = m+2 + m - 1 - m^2 - 1 + m^2 - m - m^2 - 2m = 0$$

$-m^2 - m = 0 \qquad -m(m+1) = 0 \quad \begin{cases} m = 0 \\ m = -1 \end{cases}$

Si $m \neq 0 \quad m \neq -1$ SCD.

Si $m = 0$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} rg\, A = 2 \\ rg\, A^* = 3 \end{array} \qquad S.I.$$

Si $m = -1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} rg\, A = 2 \\ rg\, A^* = 3 \end{array} \qquad S.I.$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & m-1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & m & -1 \end{vmatrix}}{-m^2 - m} = \frac{3 + m - \cancel{1} - \cancel{2m} - 1 + \cancel{2m} \cancel{-2} - 3m}{-m^2 - m} = \frac{-2m - 1}{-m^2 - m} =$$

$$= \frac{2m + 1}{m(m+1)}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} m+2 & 3 & -1 \\ m & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-m^2 - m} = \frac{-\cancel{2m} - 4 + 3 - \cancel{m} + \cancel{2} - m - 2 + \cancel{3m}}{-m(m+1)} = \frac{-(m+1)}{-m(m+1)} = \frac{1}{m}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} m+2 & m-1 & 3 \\ m & -1 & 2 \\ 1 & m & 1 \end{vmatrix}}{-(m+1)m} = \frac{-m - 2 + 2m - 2 + \cancel{3m^2} + 3 - m^2 + m - 2m^2 - 4m}{-m(m+1)} =$$

$$= \frac{-2m - 1}{-m(m+1)} = \frac{2m+1}{m(m+1)}$$

GEOMETRIA

① a) contiene a r $\begin{cases} 2x-y-5=0 \\ 2x-2z-6=0 \end{cases}$ $P(0,-5,-3)$ $Q(1,-3,-2)$ $\vec{PQ}(1,2,1)$

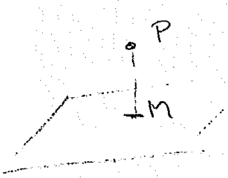
// $s \equiv 1-x = y = -\frac{z}{2} \longrightarrow \frac{x-1}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-2}$

$$\begin{vmatrix} x & 1 & -1 \\ y+5 & 2 & 1 \\ z+3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$-4x + z + 3 - y - 5 + 2z + 6 + 2y + 10 - x = 0$

$\boxed{\pi \equiv -5x + y + 3z + 14 = 0}$

b) $\pi \equiv x+2y-z+3=0$ más próximo a $P(2,0,1)$



$\vec{n}(1,2,-1) \to \vec{d_r}$ $P(2,0,1)$ $\begin{cases} x = 2+t \\ y = 2t \\ z = 1-t \end{cases}$

$2+t+4t-1+t+3=0$; $6t+4=0$ $t=-\frac{2}{3}$

$M\left(2-\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}, 1+\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right)$

③ a) $\vec{d_r}(2,a,0)$

$P_r(1,1,-1)$

$\vec{d_s}(2,1,2)$

$Q_s(1,0,0) \to \vec{P_rQ_s}(0,-1,1)$

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -1 & a & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 2a + 4 = 6 - 2a$$

$6-2a=0 \Rightarrow \boxed{a=3}$ r y s se cortan

$a \neq 3$ r y s se cruzan

b) $r: \begin{cases} x = 1+2s \\ y = 1+3s \\ z = -1 \end{cases}$ $s: \begin{cases} x = 1+2t \\ y = t \\ z = 2t \end{cases}$

$\left.\begin{array}{l} 1+2s = 1+2t \\ 1+3s = t \\ -1 = 2t \to \boxed{t = -\frac{1}{2}} \end{array}\right\} \longrightarrow \begin{array}{l} 1+2s = 3+6s \\ -2 = 4s \quad \boxed{s = -\frac{1}{2}} \end{array}$

$A(0, -1/2, -1)$

③ a) $A(1,1,1)$

$\pi \equiv x+y-z+1=0$ con los ejes.

OX $\quad y=0,\ z=0\ ;\ x=-1. \qquad B(-1,0,0)$

OY $\quad x=0,\ z=0 \quad y=-1 \qquad C(0,-1,0)$

OZ $\quad x=0 \quad y=0 \quad z=1 \qquad D(0,0,1)$

$\vec{BC}\ (1,-1,0)$

$\vec{BD}\ (1,0,1)$

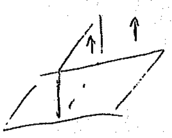
$\vec{BA} = (-2,-1,-1)$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2-1+1 = 2\ u^3$$

b) $\pi \equiv x+y-z+1=0 \quad \perp \pi'$
y contenga a OX

$A(0,0,0)$
$\vec{u}\ (1,1,-1)$
$\vec{v}\ (1,0,0)$



$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ y & 1 & 0 \\ z & -1 & 0 \end{vmatrix} = -y-z=0 \iff \boxed{y+z=0}$$

c) $\pi \equiv x+y-z+1=0 \quad \parallel \pi' \qquad A(1,1,1)$

$d(A,\pi')=3$

$\pi' \equiv x+y-z+D=0$

$$3 = \frac{|1+1-1+D|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}} =$$

$\Rightarrow 3\sqrt{3} = |D+1|$

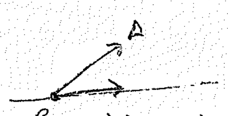
$D+1 = 3\sqrt{3} \Rightarrow D = 3\sqrt{3}-1$

ó

$D+1 = -3\sqrt{3} \rightarrow D = -3\sqrt{3}-1.$

④ $A(0,1,1) \qquad r \equiv \frac{x}{0} = \frac{y-1}{-1} = z$

a) $$d(A,r) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\ u.$$



$\vec{u}(0,-1,1)$

$B(0,1,0)$

$$\vec{BA} \wedge \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -\vec{i} \qquad |\vec{BA} \wedge \vec{u}| = 1$$

$|\vec{u}| = \sqrt{2}$

b) $d(\Delta, \pi) = \dfrac{|0+2+2-2|}{\sqrt{1^2+1^2+2^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{6}}{6}$ u.

$$\begin{cases} x = 2 - \lambda - 2\mu \\ y = 1 + \lambda \\ z = \mu \end{cases} \qquad \begin{vmatrix} x-2 & -1 & -2 \\ y & 1 & 0 \\ z & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$x - 2 + 2z + y = 0 \rightarrow x + y + 2z - 2 = 0$

$\vec{n_\pi}\ (1,1,2) \rightarrow |\vec{n_\pi}| = \sqrt{6}$

$\vec{d_r}\ (0,-1,1);\ |\vec{d_r}| = \sqrt{2}$

c) $\alpha = \text{arc sen} \dfrac{\vec{n_\pi} \cdot \vec{d_r}}{|\vec{n_\pi}|\,|\vec{d_r}|} =$

$= \text{arc sen} \dfrac{1}{\sqrt{12}}$

ANALISIS

① $f(x) = \begin{cases} \ln(ax^2+b) & \text{si } x \leq 1 \\ \sqrt{\dfrac{x^2+x-1}{x}} & \text{si } x > 1 \end{cases} \qquad a, b > 0$

$ax^2 + b > 0 \quad \forall x \leq 1$

f continua en $x = 1$ $\quad \left. \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \ln(a+b) = f(1) \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 1. \end{array} \right\} \rightarrow \boxed{a + b = e}$

f derivable

si $x < 1 \qquad f'(x) = \dfrac{2ax}{ax^2+b}.$

si $x > 1 \qquad f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{\frac{x^2+x-1}{x}}} \cdot \dfrac{(2x+1)x - (x^2+x-1)}{x^2} =$

$= \dfrac{1}{2\sqrt{\frac{x^2+x-1}{x}}} \cdot \dfrac{2x^2 + \cancel{x} - x^2 - \cancel{x} + 1}{x^2} =$

$= \dfrac{1}{2\sqrt{\frac{x^2+x-1}{x}}} \cdot \dfrac{x^2+1}{x^2}$

$$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x)$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{2a}{a+b} = 1 \\ a+b = e \end{array}\right\} \quad \dfrac{2a}{e} = 1 \Rightarrow a = \dfrac{e}{2}$$

$$b = e - a = \frac{e}{2}$$

b) $y = \ln \dfrac{1-\operatorname{sen} x}{1+\cos x}$

$$y = \ln(1-\operatorname{sen} x) - \ln(1+\cos x)$$

$$y' = \frac{-\cos x}{1-\operatorname{sen} x} + \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x}$$

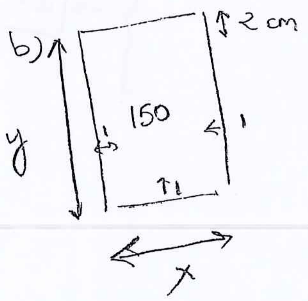
$y(0) = \ln \frac{1}{2}$; $y'(0) = -1 = m$

$= -\ln 2$

$$y + \ln 2 = -(x-0) \Rightarrow x + y + \ln 2 = 0.$$

2) a) $$\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2} = \frac{0}{0} \underset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{+\dfrac{\operatorname{sen} x}{2\sqrt{\cos x}}}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{4x\sqrt{\cos x}} =$$

$$= \frac{0}{0} \underset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{4\sqrt{\cos x} + 4x \cdot \dfrac{(-\operatorname{sen} x)}{2\sqrt{\cos x}}} = \frac{1}{4}$$

b) 

$S =$ mínima.

$S(x,y) = x \cdot y$

$$(x-2)(y-3) = 150$$

$$y = \frac{150}{x-2} + 3$$

$$S(x) = \frac{x \cdot 150}{x-2} + 3x \ ; \ S(x) = \frac{144x + 3x^2}{x-2}$$

$$S'(x) = \frac{150(x-2) - 150x}{(x-2)^2} + 3 = \frac{-300}{(x-2)^2} + 3$$

$$S'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-300}{(x-2)^2} + 3 = 0 \rightarrow 3 = \frac{300}{(x-2)^2}$$

$$3(x-2)^2 = 300 \Rightarrow (x-2)^2 = 100 \Rightarrow x-2 = 10 \rightarrow x = 12,$$

ó

$x - 2 = -10 \rightarrow x = -8$ ✗

$$\begin{array}{ccccc} & - & & + & \\ 2 & \searrow & 12 & \nearrow & \end{array}$$

Dimensiones $x = 12$

$y = 18$

(3) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-1}$ $\qquad$ Dom $f = \mathbb{R} - \{1, -1\}$

$\lim\limits_{x\to 1} f = \dfrac{1}{0} = \infty$ $\quad 1^- \to -\infty$, $\quad 1^+ \to +\infty$

$\lim\limits_{x\to -1} f = \dfrac{-1}{0} = \infty$ $\quad -1^- \to -\infty$, $\quad -1^+ \to +\infty$

A.V. $x = 1$, $x = -1$.

$\lim\limits_{x\to\infty} f = \infty$ $\qquad \nexists$ A.H.

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x^3-x} = 1.$$

$$n = \lim f(x) - mx = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^3}{x^2-1} - x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 - x^3 + x}{x^2-1} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2-1} = 0.$$

A. Obliqua $\quad y = x$

b) $$f'(x) = \frac{3x^2(x^2-1) - x^3\cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{3x^4 - 3x^2 - 2x^4}{(x^2-1)^2} = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2-1)^2}$$

$f' = 0 \Rightarrow x^4 - 3x^2 = 0 \quad x^2(x^2-3) = 0$ $\to x = 0$, $\to x = \pm\sqrt{3}$

$+ \nearrow \; -\sqrt{3} \; - \; \underset{\nexists}{-1} \; - \searrow \; 0 \; - \searrow \; \underset{\nexists}{1} \; - \; \sqrt{3} \; + \nearrow$

$M\left(-\sqrt{3}, -\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ $\qquad m\left(\sqrt{3}, \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

$$f'' = \frac{(4x^3 - 6x)\cancel{(x^2-1)^2} - (x^4 - 3x^2)\cdot 2\cancel{(x^2-1)}\cdot 2x}{(x^2-1)^{\cancel{4}\,3}}$$

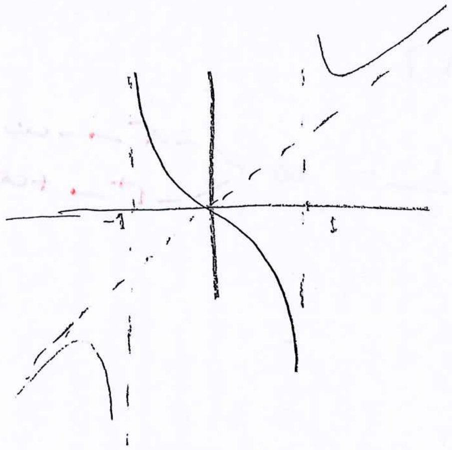
$$= \frac{\cancel{4x^5} - 6x^3 - 4x^3 + 6x - 4x^5 + 12x^3}{(x^2-1)^3} = \frac{+2x^3 + 6x}{(x^2-1)^3}$$

$f'' = 0$

$2x(x^2+3) = 0 \to x = 0$

$- \; \underset{\nexists}{-1} \; + \; 0 \; - \; \underset{\nexists}{+1} \; +$

P.I. $(0, 0)$



④ a) $\int \frac{4x^2+8x}{4x^2+1}\,dx = \int \left(1 + \frac{8x-1}{4x^2+1}\right) dx =$

$$\begin{array}{l|l} 4x^2+8x & 4x^2+1 \\ -4x^2 \quad -1 & 1 \\ \hline 8x-1 & \end{array}$$

$= \int dx + \int \frac{8x}{4x^2+1}\,dx - \int \frac{1}{4x^2+1}\,dx =$

$= x + \ln(4x^2+1) - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(2x) + C$

b) $\int x^2 \cos(2x-1)\,dx = \frac{x^2}{2} \cdot \operatorname{sen}(2x-1) - \frac{2}{2}\int x \operatorname{sen}(2x-1)\,dx$

$u = x^2 \qquad du = 2x\,dx$

$dv = \cos(2x-1)\,dx \;; \quad v = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x-1)$

$u = x \qquad du = dx$

$dv = \operatorname{sen}(2x-1)\,dx \qquad v = -\frac{1}{2}\cos(2x-1)$

$= \frac{x^2}{2}\operatorname{sen}(2x-1) - \left[-\frac{x}{2}\cos(2x-1) + \frac{1}{2}\int \cos(2x-1)\,dx\right] =$

$= \frac{x^2}{2}\operatorname{sen}(2x-1) + \frac{x}{2}\cos(2x-1) - \frac{\operatorname{sen}(2x-1)}{4} + C$

5) a) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{tg}(2+\ln x)}{x}\,dx =$ $\quad 2+\ln x = t$, $\quad \frac{1}{x}dx = dt$

$= \displaystyle\int \operatorname{tg} t\,dt = \int \frac{\operatorname{sen} t}{\cos t}\,dt =$ $\quad \cos t = z$, $\quad -\operatorname{sen} t\,dt = dz$

$= \displaystyle\int \frac{-dz}{z} = -\ln z = -\ln \cos t = \underline{\underline{-\ln\cos(2+\ln x)+\text{cte}}}$

b) $x^3 - x = x^2 + x$, $\quad x^3 - x^2 - 2x = 0$

$x(x^2 - x - 2) = 0 \;\begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$

$A = \left| \displaystyle\int_{-1}^{0} (x^3 - x^2 - 2x)\,dx \right| + \left| \int_{0}^{2} (x^3 - x^2 - 2x)\,dx \right| =$

$= \left| \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2 \right]_{-1}^{0} \right| + \left| \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2 \right]_{0}^{2} \right| =$

$= \left| \left[0 - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} - 1 \right) \right] \right| + \left| \left[\left(\frac{16}{4} - \frac{8}{3} - 4 \right) - 0 \right] \right| =$

$= \left| -\frac{3+4-12}{12} \right| + \left| -\frac{8}{3} \right| = \frac{5}{12} + \frac{8}{3} = \underline{\underline{\frac{37}{12}\,u^2}}$

CURSO: 2º B.C.T. **EXAMEN: convocatoria extraordinaria**

El examen consta de 7 preguntas de las que debes elegir un máximo de 6.

Todas las preguntas tienen el mismo valor.

Se debe indicar claramente la pregunta que se ha desechado: ………………..

1) a) ***(6 puntos)*** Resuelve utilizando el método de la matriz inversa:

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ 3x+2y=1 \\ x+y+2z=2 \end{cases}$$

b) ***(4 puntos)*** Sin utilizar Sarrus calcula el valor del determinante: $\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \boldsymbol{a^2-1} & \boldsymbol{a} \\ \mathbf{1} & \boldsymbol{2a^2-2} & \boldsymbol{2a-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \boldsymbol{a^2} \end{vmatrix}$

2) ***(10 puntos)*** Discute el siguiente sistema, según los diferentes valores del parámetro ***m*** y resuélvelo cuando sea compatible:

$$\left.\begin{array}{r} -x+my+2z=-1 \\ 2x+my-z=2 \\ mx-y+2z=-1 \end{array}\right\}$$

3) a) Dados los puntos *A* (−2, 0, 1), *B* (1, −3, 2), *C* (−1, 4, 5) y *D* (3, 1, −2), calcula:

i) ***(2 puntos)*** El área del triángulo de vértices *A*, *B* y *C*.

ii) ***(2 puntos)*** El volumen del tetraedro de vértices *A*, *B*, *C* y *D*.

b) ***(3 puntos)*** Halla la ecuación del plano que contiene a la recta $r\colon \frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{1}$ y es perpendicular al plano $\pi\colon 2x+y+z-2=0$

c) ***(3 puntos)*** Halla el punto simétrico de P(-2, 1, 5) respecto a la recta $r\colon \frac{x-2}{1}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z-1}{1}$

4) Dada la función $f(x) = \begin{cases} e^x + 2\,a & si \quad x \leq 0 \\ a\,x^2 + 2 & si \quad 0 < x \leq 1 \\ \frac{b}{2x} & si \quad 1 < x \end{cases}$

i) ***(4 puntos)*** Calcula **a** y **b** para que la función sea continua en todo $\Re$

ii) ***(6 puntos)*** Para los valores de **a** y **b** calculados en **(i)** estudia la derivabilidad de la función

5) a) ***(3 puntos)*** Deriva la siguiente función simplificando el resultado todo lo posible

$$y = \frac{2x^3 arc\ tg\ x + \ln(x^2+1) - x^2}{6}$$

b) Calcula los siguientes límites:

$\boldsymbol{i})$ (**3 *puntos***) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sqrt{9\,x^2 + x} - \sqrt{9\,x^2 - 2\,x}}{3\,x - 1}$ $\qquad$ $\boldsymbol{ii})$ (**4 *puntos***) $\lim\limits_{x \to -2} \left(\dfrac{x+5}{1-x}\right)^{\frac{x}{x+2}}$

6) ***(10 puntos)*** Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = \frac{1}{x(x^2-3)}$ y halla los extremos relativos, si existen.

7) a) ***(6 puntos)*** Calcula $\int \frac{1}{x(x^2-3)}\, dx$

b) ***(4 puntos)*** Halla el área de la región del plano limitada por la curva $y = x^3 + x^2 - 2x$ y el eje de abscisas