

- 1) Un tren transporta 520 viajeros y la recaudación del importe de sus billetes asciende a 3150 €. Calcula cuántos viajeros han pagado el importe total del billete, que cuesta 9 €, cuántos han tenido un descuento del 30 % y cuántos han tenido un descuento del 50 %, sabiendo que el número de viajeros que han tenido un descuento del 30 % es el doble del número de pasajeros que paga el billete completo. Resuélvelo por el método de Gauss.

2) a) Dadas las matrices: $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ -2 & 6 & 0 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Halla una matriz X que verifique: $A = B \cdot X$

- b) Comprueba aplicando las propiedades de los determinantes, la siguiente identidad:

$$\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)^3$$

- 3) Dado el siguiente sistema:

$$\left. \begin{array}{l} x - 2y + (1-m)z = m-1 \\ x + (1+m)y + 4z = 0 \\ x - y + mz = 0 \end{array} \right\}$$

- i) Discutirlo según los valores del parámetro “m”
- ii) Resolverlo en el caso de que sea compatible indeterminado
- iii) Resolverlo en el caso de que sea compatible determinado

1) Calcula los alumnos que hay en tres clases diferentes A, B y C sabiendo que entre las tres clases hay 60 alumnos, si se van la tercera parte de los alumnos de la clase C a la clase A entonces en la clase A habrá el triple número de alumnos que en la clase C. Además si se van la cuarta parte de los alumnos de la clase B a la clase C, entonces en la clase C habrá 5 alumnos más que en la clase B. Resuélvelo por el método de Gauss.

2) a) Dadas las matrices: $A = \begin{pmatrix} x & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & x \end{pmatrix}$

i) Calcula los valores de “x” para los cuales la matriz producto $A \cdot B$ no tiene inversa

ii) Para el caso $x = -1$ comprueba que se cumple que $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

b) Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = -1/3$ calcula razonadamente $\begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ a+p & b+q & c+r \\ -x+a & -y+b & -z+c \end{vmatrix}$

3) Dado el siguiente sistema:

$$\left. \begin{array}{l} ax + y - z = 1 \\ x + 2y - az = 2 \\ -x + y - z = a - 1 \end{array} \right\}$$

i) Discutirlo según los valores del parámetro “a”

ii) Resolverlo en el caso de que sea compatible indeterminado

iii) Resolverlo en el caso de que sea compatible determinado

- 1) a) Dados los puntos $A(2,3,0)$ y $B(-2,1,4)$, hallar la ecuación del plano π mediatriz del segmento AB
- b) Dado el plano $\pi: x + 3y + 2z - 6 = 0$, hallar el volumen del tetraedro formado por π y los tres planos coordenados.

- 2) Sea el plano $\pi: x - 5y + z + 3 = 0$ y sean r y s las rectas de ecuaciones:

$$r: x - 3 = \frac{z-y}{-2} = \frac{z-4}{3} \quad s: \frac{x+1}{2} = y = z + 2 \quad \text{Hallar:}$$

- a) Los puntos de intersección del plano π con cada una de las dos rectas.
- b) Hallar el punto simétrico de $P(1,4,-2)$ respecto del plano $\pi_1: 2x - y + z - 2 = 0$

- 3) a) Hallar las ecuaciones paramétricas de la recta r dada por la intersección de los planos siguientes:

$$\pi_1: x + y - z - 1 = 0 \quad \text{y} \quad \pi_2: 2x - y + z = 0$$

- b) Encontrar la distancia del punto $P(1,0,1)$ a dicha recta.

4) Dadas las rectas $r: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = -\lambda \end{cases}$ y $s: \begin{cases} x = t \\ y = 2 + 2t \\ z = 0 \end{cases}$

- a) Hallar la posición relativa de ambas rectas
- b) Hallar la recta t perpendicular común a r y s que se apoya en ambas

1) Sea la recta $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+5}{-5} = \frac{z+3}{4}$ y el plano $\pi: 2x + 4y + 4z = 5$

- a) Estudiar la posición relativa de r y π
 b) Calcular la ecuación general de un plano π_1 que es perpendicular a π y contiene a r

2) a) Calcular la ecuación de la recta que pasa por el origen y es perpendicular al plano $\pi: x + y + z = 3$. Obtener el punto de corte de la recta con el plano π .

b) Hallar el punto de la recta $r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases}$ cuya distancia al punto $P(1,0,2)$ sea $\sqrt{5}$

3) Hallar la ecuación de la recta con la dirección del vector $\vec{u} = (1, -1, 0)$ y que pasa por P' , siendo P' el punto simétrico de $P(0, -2, 0)$ respecto al plano $\pi: x + 3y + z = 5$.

4) Dadas las rectas $r: x - 4 = \frac{y-7}{2} = \frac{z+1}{1/2}$ y $s: \begin{cases} x = 4 + 2\lambda \\ y = 2 + 4\lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$ comprobar que son paralelas y hallar la distancia entre ellas.

5) Halla la ecuación general del plano que pasa por $P(-1, 2, 0)$ y es perpendicular a la recta intersección de estos planos: $\pi_1: x + y - z + 1 = 0$ y $\pi_2: 2x + y + 3z - 2 = 0$

1) Dada la función $y = |x^2 - x - 12|$

- a) Escribe la ecuación de la función definida a trozos
- b) Estudia su continuidad y su derivabilidad
- c) Representala gráficamente
- d) Calcula la ecuación de la recta tangente en el punto de abscisa $x = 5$

2) Dada la función $f(x) = \begin{cases} e^x + a & \text{si } x \leq 0 \\ ax^2 + 2 & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ \frac{b}{2x} & \text{si } 1 < x \end{cases}$

- i) Calcula **a** y **b** para que la función sea continua en todo \mathbb{R}
- ii) Para los valores de **a** y **b** calculados en (i) estudia la derivabilidad de la función

3) a) Deriva las siguientes funciones simplificando el resultado todo lo posible

$$i) y = \frac{2x^3 \operatorname{arc} \operatorname{tg} x + \ln(x^2 + 1) - x^2}{6}$$

$$ii) y = 2 \operatorname{sen} \sqrt{x} - 2 \sqrt{x} \cos \sqrt{x}$$

- b) Dada la función $y = \frac{ax}{x+b}$, calcula **a** y **b** sabiendo que pasa por el punto $P(-2,2)$ y que la tangente en ese punto es la recta $y = -3x - 4$

4) Calcula los siguientes límites:

$$i) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}}{2x + 1}$$

$$ii) \lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{x+3}{1-x} \right)^{\frac{2x}{x+1}}$$

$$iii) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - x}{x^3 - 8x^2 + 7x}$$

1) a) Calcula los siguientes límites:

$$i) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}^3 x + \operatorname{cos}^2 x - 1}{x^2}$$

$$ii) \lim_{x \rightarrow 1} (x \cdot e^{1-x})^{\frac{1}{x-1}}$$

b) Queremos construir una caja con forma de ortoedro para que contenga 2 litros = 2000 cm³ de leche, de manera que la altura sea el doble de uno de los lados de la base. Calcula el largo, el ancho y el alto de la caja para que el área del ortoedro sea mínima.

2) Dada la función $y = \frac{2x^3}{x^2-4}$. Calcula su dominio, los cortes con los ejes, las asíntotas, los extremos relativos, su simetría y represéntala gráficamente.

3) Calcula las siguientes integrales:

$$i) \int (x^2 + 1) e^{2x} dx$$

$$ii) \int \frac{x+2}{(1+\sqrt{x})(\sqrt{x}-2)} dx \quad (\text{Haz el cambio } x = t^2)$$

4) Sean las parábolas de ecuaciones $y = x(4-x)$ e $y = (x-4)(x-2)$

a) Dibuja las dos parábolas y el recinto del plano limitado por sus puntos de corte

b) Halla el área encerrada por las dos parábolas entre sus puntos de corte

1) Dada la función $f(x) = \begin{cases} \frac{2k+1}{x+1} & \text{si } x < 0 \\ x^2 - 3x + k & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

a) Calcula **k** para que la función sea continua en $x=0$

b) Para el caso **k=1**

i) Estudia la continuidad y la derivabilidad

ii) Calcula la ecuación de la recta tangente en $x=2$

2) a) Calcula $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \operatorname{tg} x) \frac{1}{\operatorname{sen} x}$

b) Tenemos que hacer dos chapas cuadradas. Una de ellas con material de 2 €/cm^2 , la otra con material de 3 €/cm^2 . ¿Cómo hemos de elegir los lados de los cuadrados si queremos que el coste total sea mínimo y si además nos piden que la suma de los perímetros de los cuadrados ha de ser 100 centímetros?.

3) Dada la función $y = \frac{x^2 + 2x - 2}{x - 1}$. Calcula su dominio, los cortes con los ejes, las asíntotas, los extremos relativos, su simetría y representala gráficamente.

4) Dadas las funciones $y = \frac{-x^2}{2} + 2x$ e $y = x$

a) Haz una gráfica de las dos funciones

b) Halla el área encerrada por las dos funciones, la recta $x=0$ y la recta $x=3$

1) Calcula las edades actuales de una madre y sus dos hijos sabiendo que hace 14 años la edad de la madre era 5 veces la suma de las edades de los hijos en aquel momento; que dentro de 10 años la edad de la madre será la suma de las edades que los hijos tendrán en ese momento; y que actualmente la edad de la madre es 22 veces la diferencia entre las edades de los hijos. Resuélvelo aplicando el método de Gauss.

2) Dada la matriz: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ a & a & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Estudia para qué valores del parámetro “a” la matriz A es inversible. Calcula la inversa para $a=0$

b) Teniendo en cuenta que $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2$ y aplicando las propiedades de los determinantes,

calcula sin aplicar la regla de Sarrus el siguiente determinante $\begin{vmatrix} 0 & a & a^2 \\ a^{-1} & 0 & a \\ a^{-2} & a^{-1} & 0 \end{vmatrix}$

3) Dado el siguiente sistema:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ mx + m^2 y + m^2 z = 1 \\ mx + my + m^2 z = 1 \end{array} \right\}$$

i) Discutirlo según los valores del parámetro “m”

ii) Resolverlo en el caso de que sea compatible indeterminado

iii) Resolverlo en el caso de que sea compatible determinado

1)

a) Calcula $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x \cdot \cos x - 1}{\sin x - x + 1 - \cos x}$

b) Se quiere construir un estadio vallado de 1000 m^2 de superficie. El estadio está formado por un rectángulo de base x y dos semicírculos en los laterales de diámetro también x , de manera que cada lado horizontal del rectángulo es diámetro de uno de los semicírculos. El precio de un metro de valla para los lados verticales es de 10 € y el precio de un metro de valla para las semicircunferencias es de 20 €. Calcula el valor de x para que el coste de la valla sea mínimo.

2) Dada la función $y = \frac{x^2}{2x+4}$. Calcula su dominio, los cortes con los ejes, las asíntotas, los extremos relativos, su simetría y represéntala gráficamente.

3) Calcula las siguientes integrales:

i) $\int x^2 \cdot \ln x \, dx$

ii) $\int e^x \cdot \cos 2x \, dx$

4) Calcula el área encerrada por la función $f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}$ la recta $x=-1$ y la recta $x=1$.
Haz un esbozo de la gráfica de la función en ese tramo.

1) a) Dadas las matrices: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Estudiar si existe algún valor del número real λ para el cual se cumpla que $(A - \lambda I)^2 = B$

(6 puntos)

b) Teniendo en cuenta que $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 1$ y aplicando las propiedades de los determinantes,

calcula sin aplicar la regla de Sarrus el siguiente determinante $\begin{vmatrix} x & 1/4 & 4 \\ y & 0 & 4 \\ z & 1/2 & 12 \end{vmatrix}$

(4 puntos)

c) Dado el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x - y + m z = 0 \\ m x + y - z = 0 \\ (m + 1) x + z = 0 \end{cases}$$

i) Discutirlo según los valores del parámetro “m” (5 puntos)

ii) Resolverlo en el caso de que sea compatible indeterminado (5 puntos)

2) Dadas las rectas $r: \begin{cases} x - y + 2 = 0 \\ z = -1 \end{cases}$ y $s: \begin{cases} x = 2 \\ y - z - 5 = 0 \end{cases}$

a) Determinar su posición relativa (4 puntos)

b) En caso de cortarse, determinar el ángulo que forman y el punto de corte (6 puntos)

3) a) Calcula $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+\cos x}{x+2} \right) \frac{1}{\operatorname{sen} x}$ (5 puntos)

b) Sea $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$ con $x \in (0, +\infty)$ (5 puntos)

i) Calcula los intervalos de crecimiento, decrecimiento y los extremos relativos

ii) Calcula

$$\int f(x) dx$$

(5 puntos)

c) Calcula

$$\int \frac{2x^3 - 9x^2 + 9x + 6}{x^2 - 5x + 6} dx$$

(5 puntos)